# Mengenal IIR Filter

Oleh:
Tri Budi Santoso
Lab Sinyal,
EEPIS-ITS

# Konsep Dasar

- Infinite Impuse Response (IIR) dalam hal ini jangan dipahami sebagai suatu kondisi response impulse dari - ~ dan berakhir sampai + ~
- Lebih tepat dipahami sebagai suatu filter yang memperhitungkan kondisi sebelum dan sesudahnya, atau sebagai gabungan antara “feedback” dan “feed forward”

Pada FIR:→ “feed forward”
Pada IIR:→ “feedback” dan “feedforward”

# 1. Bentuk Umum Persamaan Beda IIR

$$y[n] = \sum_{l=1}^{N} a_l \, y[n-l] + \sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k] \qquad \textbf{(1)}$$

dua set koefisien

$\{b_k\}$ koefisien feedback

$\{a_l\}$ koefisien feed foreward

banyaknya (total koefisien) = M+N+1

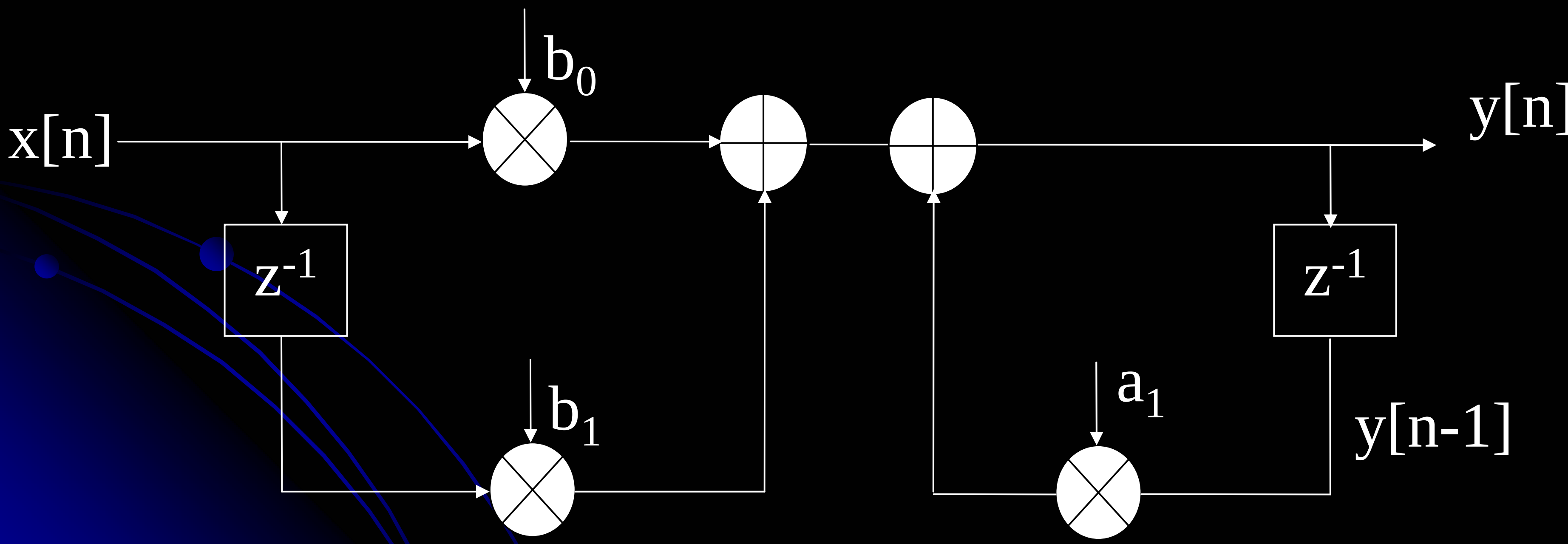
biasanya N ditetapkan sebagai orde filter IIR

# Contoh 1:

Suatu sistem IIR memiliki nilai M=N=1 dengan fungsi output sebagai berikut

$y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_0 y[n-1]$ (2)

Maka bentuk diagram bloknay didapatkan sebagai:



# 2 Respon dalam Domain Waktu

Kondisikan koefisien-koefisien dalam persamaan (2) sebagai berikut:
$a_1$= 0.8, $b_0$= 5 dan $b_1$=0 sehingga:

y[n] = 0.8 y[n-1] + 5x[n] (3)

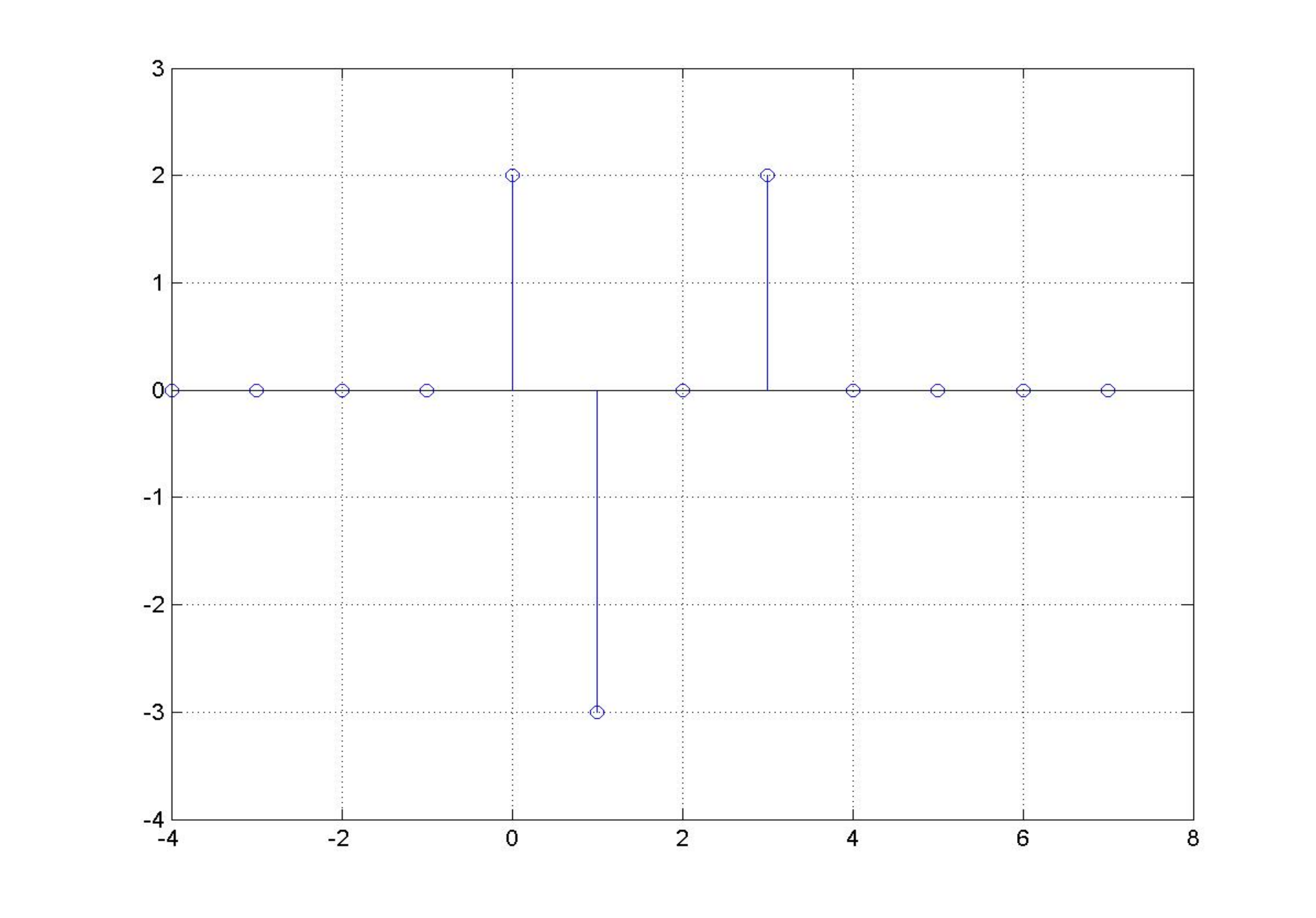
dengan asumsi input berupa impulse sebagai berikut:

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + 2\delta[n-3] \quad (4)$$

**Dapatkan disini x[0]=2, x[1]=-3, x[2]=0, x[3]=2**
**y[0] = 0,8 y[n-1] +5x[n] = 0,8 y[-1] +5x[0] = 0,8(0) + 5(2) = 10**
**y[1] = 0,8 y[0] +5x[1] = 0,8(10) + 5(-3) = -7**
**y[2] = 0,8 y[1] +5x[2] = 0,8(-7) + 5(0) = -5,6**
**y[3] = 0,8 y[2] +5x[3] = 0,8(-5,6) + 5(2) = 5,52**
**y[4] = 0,8 y[3] +5x[4] = 0,8(5,52) + 5(0) = 4,416**
**y[5] = 0,8 y[4] +5x[5] =0,8(4,416) + 5(0) = 3,5328**
**y[6] = 0,8 y[5] +5x[6] =0,8(3,5328) + 5(0) = 2,8262**
**….dst**

# Matlab Code

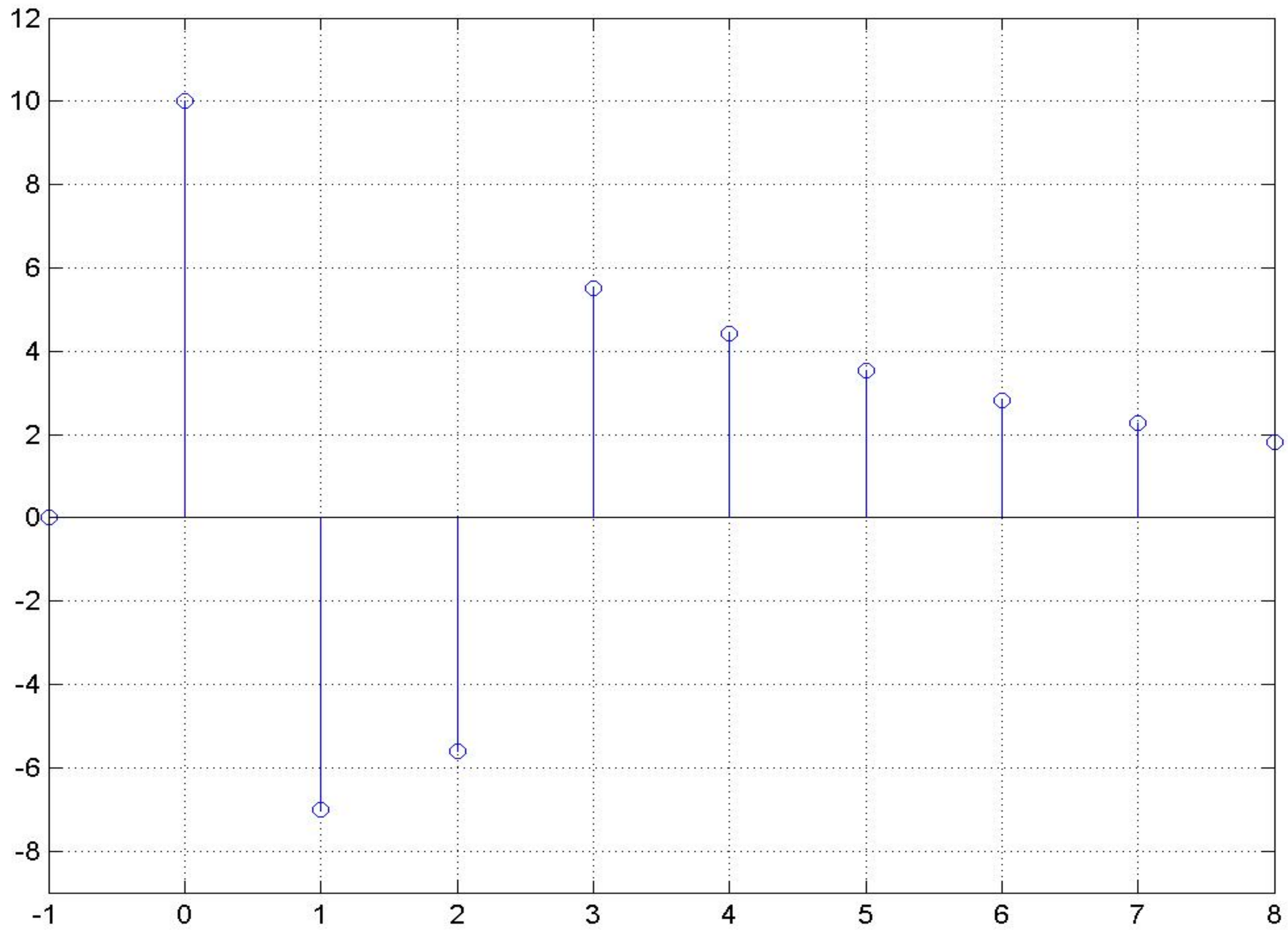
```
y(1)=0;
x(2)=2; x(3)=-3; x(4)=0; x(5)=2;
for n=2:5
   y(n) = 0.8*y(n-1) + 5*x(n);
end
for n=6:10
   y(n) = 0.8*y(n-1);
end
nn=0:9;
stem(nn-1,y)
grid
```



Dalam hal ini input = 0 untuk n > 3

Maka persamaan beda menjadi y[n]=0,8y[n-1]; n>3
Rasio antar deret bernilai konstan a =0,8, sehingga bisa dimodifikasi kembali sebagai:

$$y[n] = y[3](0,8)^{n-3}$$ untuk n≥3



# 3 Fungsi Sistem pada Suatu Filter IIR

Hubungan domain-n dengan domain-z dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y[n] = h[n] * x[n] \Leftrightarrow Y[z] = H[z]X[z]$$

juga berlaku pada sistem IIR

## 3.1 Kasus Umum First Order

$$y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1] \qquad \textbf{(5)}$$

bentuk-z nya adalah:

$$Y(z) = a_1 z^{-1} Y(z) + b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z)$$

Coba cari formulasi H(z)=Y(z)/X(z)

Maka akan didapatkan bentuk:

$$Y(z) - a_1 z^{-1} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z)$$
$$\left(1 - a_1 z^{-1}\right) Y(z) = \left(b_0 + b_1 z^{-1}\right) X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(b_0 + b_1 z^{-1}\right)}{\left(1 - a_1 z^{-1}\right)} = \frac{B(z)}{A(z)} \qquad \textbf{(6)}$$

Syntax umum dalam Matlab:
yy=filter(bb,aa,xx)
bb=koefisien numerator (pembilang) → B(z)
aa=koefisien denumerator (penyebut) → A(z)

# Contoh 2:

Suatu feedback filter dinyatakan dalam domain-n sebagai:
y[n] = 0,5y[n-1] - 3x[n] + 2x[n-1]
Buat program Matlab untuk filter ini.

**Penyelesaian:**
Dari kasus ini didapatkan:
aa = 1; -0,5
bb = -3; 2
Dengan Matlab bentuk ini akan dituliskan sebagai:
yy=filter([-3,2], [1,-0.5],xx)

# Contoh 3:

Pada kasus yang sama coba anda cari bentuk system function dalam domain-z

**Penyelesaian:**

Dengan cara yang sudah standar kita rubah persamaan diatas menjadi domain-z

$$Y(z) = 0{,}5z^{-1}Y(z) - 3X(z) + 2z^{-1}X(z)$$

$$Y(z) - 0{,}5z^{-1}Y(z) = -3X(z) + 2z^{-1}X(z)$$

$$\left(1 - 0{,}5z^{-1}\right)Y(z) = \left(-3 + 2z^{-1}\right)X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(-3 + 2z^{-1}\right)}{\left(1 - 0{,}5z^{-1}\right)}$$

# Contoh 4:

Suatu syntax Matlab dinyatakan sebagai berikut:
yy=filter(5,[1,0.8],xx)
Cari system function dan respon impulsenya (respon dalam domain-n)

**Penyelesaian:**
Dalam hal ini didapatkan nilai bb=5 dan aa=1; 0,8
Maka kita dapat menyususn system function dalam domain-z sebagai berikut:

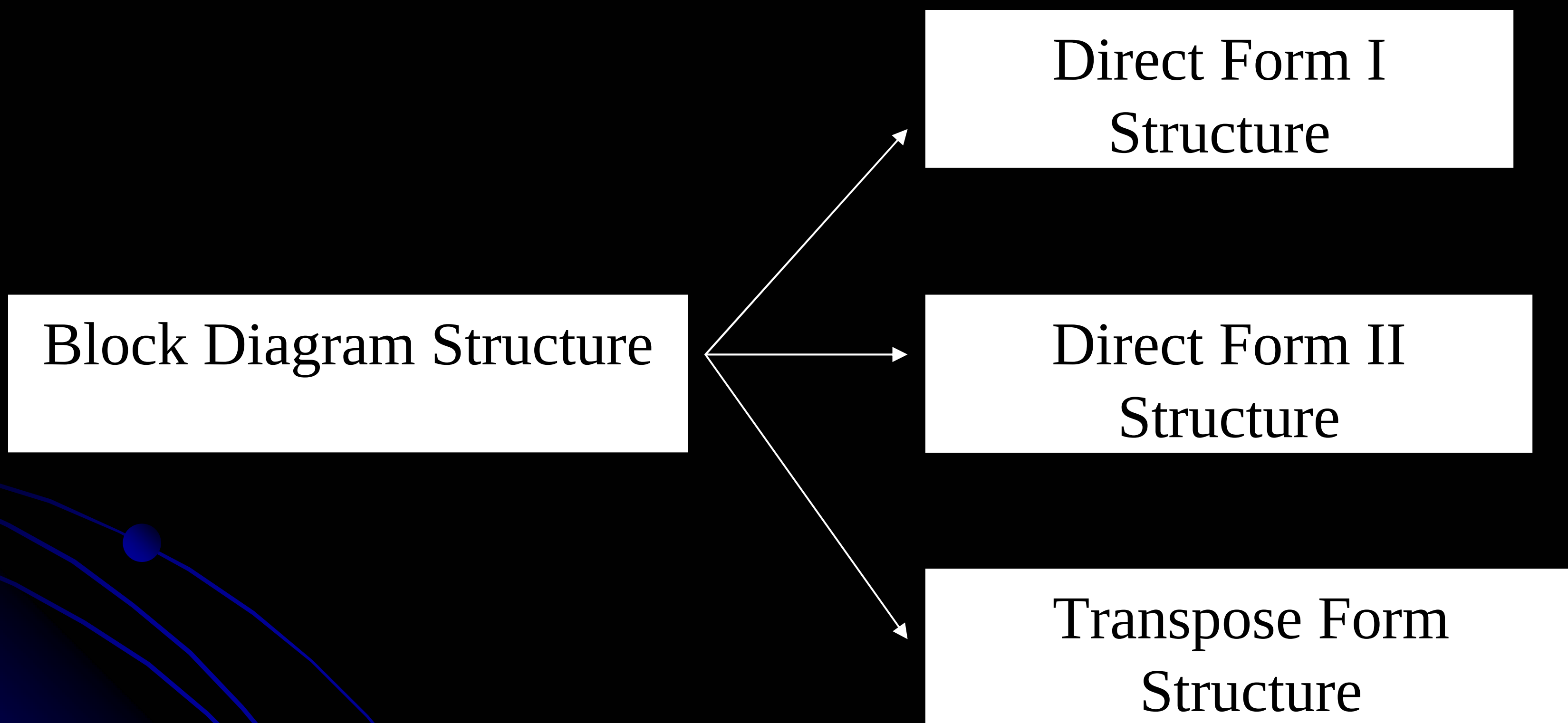
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{5}{1+0,8z^{-1}}$$

$$Y(z)(1+0,8) = X(z)$$

$$Y(z) = -0,8z^{-1}Y(z) + 5X(z)$$

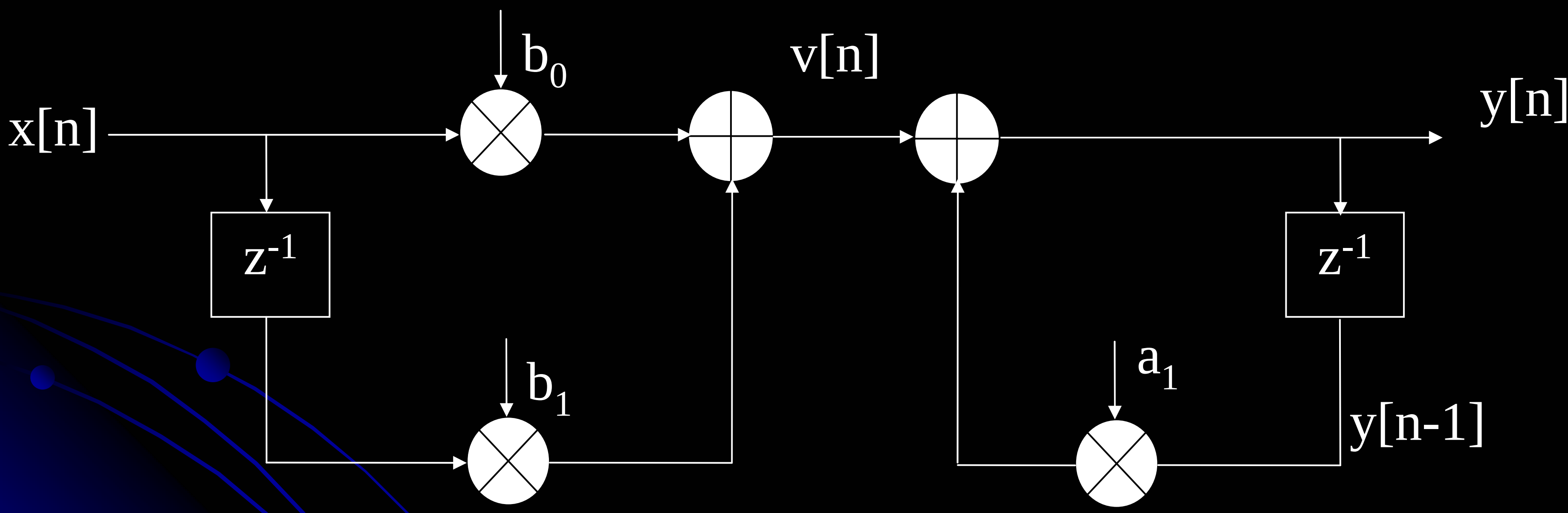
Dalam domain-n akan didapatkan bentuk:
y[n] = -0,8y[n-1] + 5x[n]

# 3.2 System Function dan Block-Diagram Structure



# 3.2.1. Direct Form I Structure

Bentuk dasar kita ulangi sebagai berikut




Feed forward part B(z)

Feed back part = 1/A(z)

Kembali kita lihat:

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}}{1-az^{-1}}=\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right)\left(b_0+b_1z^{-1}\right)=\frac{1}{A(z)}B(z)$$

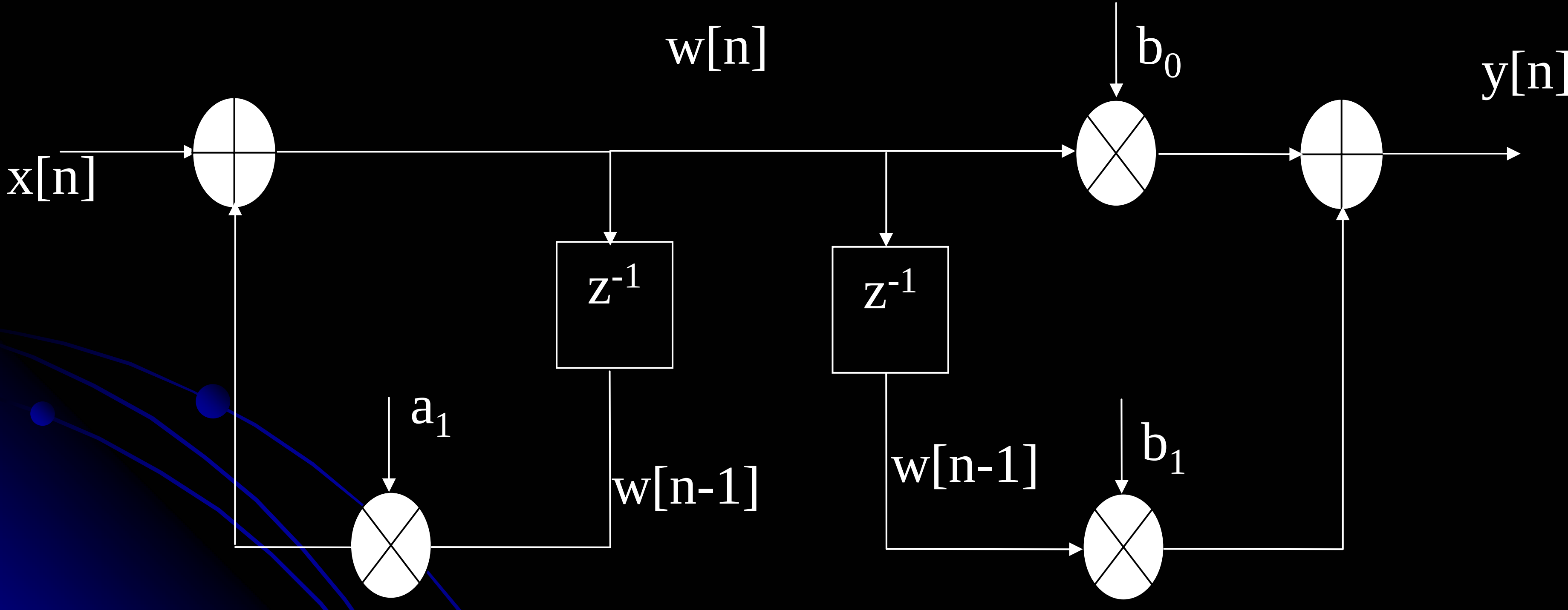
Bisa juga sebagai rasio dua persamaan beda:
$v[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1]$
$y[n] = a_1y[n-1] + v[n]$
bentuk ini dikenal sebagai "Direct Form I Sructure"

# 3.2.2. Direct Form II Structure

Coba kita rubah

$$H(z) = \left(\frac{1}{A(z)}\right)B(z) = B(z)\left(\frac{1}{A(z)}\right)$$

Blok diagramnya menjadi




Feed back part = 1/A(z)

Feed forward part B(z)

- Sistem ini equilvalen dengan:

$w[n] = a_1x[n-1] + x[n]$

$y[n] = b_0x[n-1] + b_1w [n-1]$

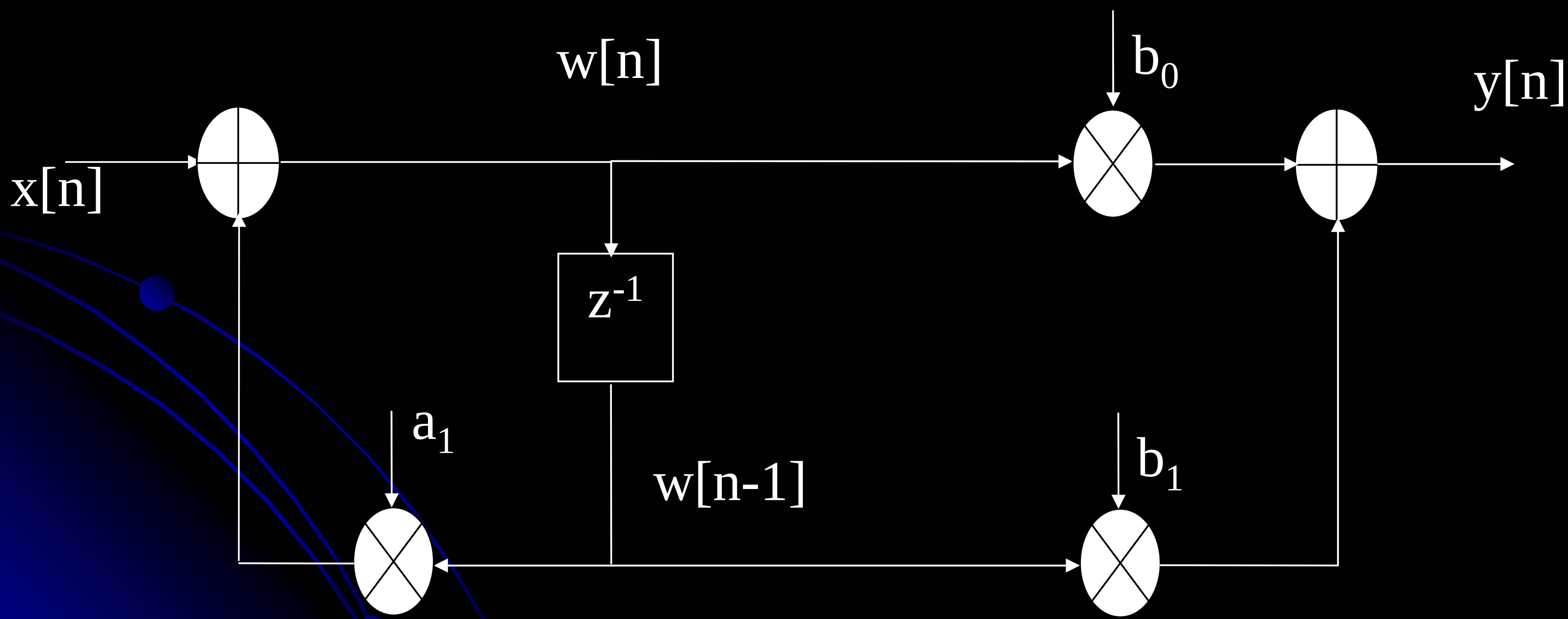
Dari persamaan dalam domain-z yang sudah diperoleh:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

➔ memberikan bentuk Direct Form II Structure secara lebih sederhana sebagai:

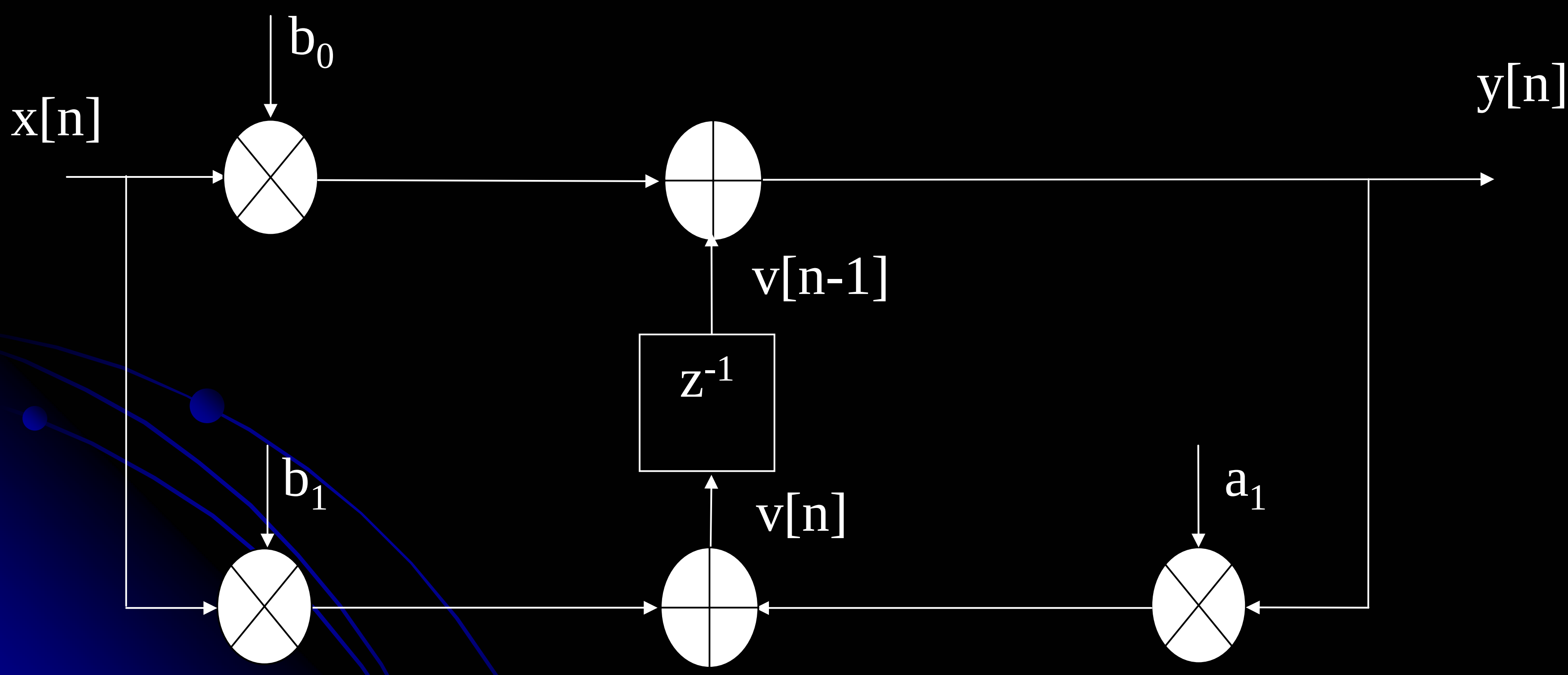
**Blok diagram ini memberikan informasi tentang transformasi:**

1. Semua panah yang dibalik arahnya dengan multiplier tidak merubah nilai atau lokasinya
2. Semua titik-titik cabang menjadi jumlahan, dan semua titik jumlahan menjadi cabang
3. Input dan output dipertukarkan



# 3.2.3. Transpose Form Structure

Bentuk gambar pada Direct Form II Structure bisa ditranspose menjadi:



Modifikasi persamaan dengan menjumlah node:

$y[n] = b_0 x[n] + v[n-1]$ (7)

$v[n] = b_1 x[n] + a_1 y[n]$ (8)

Transformasi z memberikan:

$$Y(z) = b_0 X(z) + z^{-1} V(z)$$

$$V(z) = b_1 X(z) + a_1 z^{-1} Y(z)$$

Eliminasi terhadap V(z) memberikan

$$Y(z) = b_0 X(z) + z^{-1}\left(b_1 X(z) + a_1 z^{-1} Y(z)\right)$$

$$\left(1 - a_1 z^{-1}\right) Y(z) = \left(b_0 + b_1 z^{-1}\right) X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

# Hubungan Sistem IIR dengan Impulse Response

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

dengan h[n] = $a^n$u[n]

Maka Ekuivalennya adalah:

$$a^n u[n] \Leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-n}}$$

# Contoh:

Sistem IIR memiliki respon impulse:
$y[n] = a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$

System functionnya adalah:

$$h[n] = b_0 (a_1)^n u[n] + b_1 (a_1)^{n-1} u[n-1]$$

Gunakan sifat linearitas dan delay pada transformasi–z:

$$\begin{aligned} H(z) &= b_0 \left( \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \right) + b_1 z^{-1} \left( \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}} \right) \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \end{aligned}$$

# 4. Respon Frekuensi pada Filter IIR

Sistem LTI, jika:

$$x[n] = e^{j\omega n}$$

$$y[n] = H(\omega)e^{j\omega n}$$

$$H(\omega) = H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Kembali ke system function H(z) pada IIR:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega}}{1 - a_1 e^{-j\omega}}$$

# Kuadrat magnitudonya memberikan:

$$
\begin{aligned}
\left|H(e^{j\omega})\right|^2 &= H(e^{j\omega})H^*\left(e^{j\omega}\right) \\
&= \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega}}{1 - a_1 e^{-j\omega}} \times \frac{b_0^* + b_1^* e^{-j\omega}}{1 - a_1^* e^{-j\omega}} \\
&= \frac{|b_0|^2 + |b_1|^2 + b_0 b_1^* e^{+j\omega} + b_0^* b_0 e^{+j\omega}}{1 + |a_1|^2 - a_1^* e^{+j\omega} - a_1 e^{-j\omega}} \\
&= \frac{|b_0|^2 + |b_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left\{b_0^* b_0 e^{+j\omega}\right\}}{1 + |a_1|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{a_1 e^{-j\omega}\right\}}
\end{aligned}
$$

→ Dalam hal ini tidak ada asumsi bahwa koefisien filter adalah real

Jika koefisien-koefisien bernilai real, maka:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \frac{\left|b_0\right|^2 + \left|b_1\right|^2 + 2b_0^* b_0 \cos\left(\omega\right)}{1 + \left|a_1\right|^2 - 2a_1 \cos\left(\omega\right)}$$

Fasenya dinyatakan sebagai:

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{-b_1 \sin(\omega)}{b_0 + b_1 \cos(\omega)}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{a_1 \sin(\omega)}{1 - a_1 \cos(\omega)}\right)$$

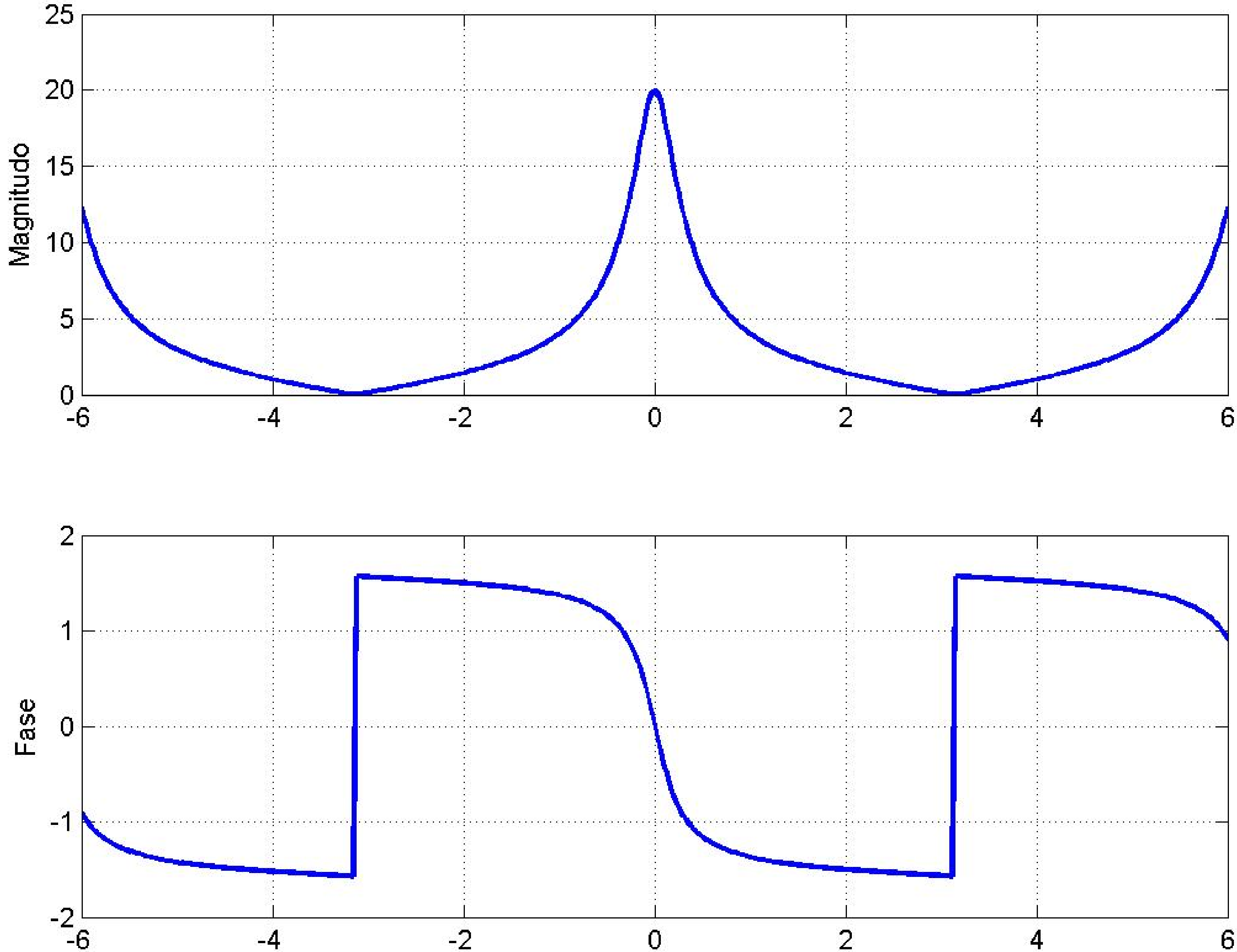
Dengan perangkat lunak Matlab akan sangat membantu untuk melihatr respon frekuensinya.

Misal suatu IIR Filter memiliki reponse impulse sebagai berikut:
y[n] = 0,8y[n-1] + 2x[n] +2x[n-1]

Kita bisa memodifikasinya menjadi:
y[n] - 0,8y[n-1] = 2x[n] +2x[n-1]

**Maltab Code:**

```
aa=[1,-0.8];
bb=[2,2];
w=-6:0.03:6;
HH=freqz(bb,aa,w);
subplot(2,1,1)
plot(w,abs(HH),'linewidth',2)
grid
ylabel('Magnitudo')
subplot(2,1,2)
plot(w,phase(HH),'linewidth',2)
grid
ylabel('Fase')
```



Magnitudo
25
20
15
10
5
0
-6
-4
-2
0
2
4
6
Fase
2
1
0
-1
-2
-6
-4
-2
0
2
4
6