Penggunaan Transformasi – z pada Analisa Respon Frekuensi Sistem FIR

Oleh:
Tri Budi Santoso
E-mail:tribudi@eepis-its.edu
Lab Sinyal, EEPIS-ITS

konsep pemikiran

“domains of representation”

Domain-n (discrete time):
Sequence, impulse response, persamaan beda

Domain-w
Freq. Response, spectral representation

Domain-z
Operator dan pole-zero

Apabila suatu kasus sulit dipecahkan pada suatu domain tertentu,
maka transformasi ke domain yang lain akan mudah menyelesaikannya.

1. Definisi Transformasi –z

domain-n		domain-z
x[n] = d[n-n$_0$]	⇔	$X(z) = z^{-n_0}$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N} x[k]\delta[n-k]$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N} x[k] z^{-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{N} x[k] \left(z^{-1}\right)^{k}$$

- Proses pengolahan audio secara digital:

- analisis langsung sulit:
  → transformasi z untuk mendapat analitis mudah dengan operasi aljabar (domain-z)

- analisis frekuensinya
  →dalam domain-w

- implementassinya:
  →dalam domain-n

Contoh 1:

Dapatkan bentuknya dalam domain z

$$x[n] = 2\delta[n] + 4\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 4\delta[n-3] + 2\delta[n-4]$$

Penyelesaian:

Ditabelkan….

n	n<-1	-1	0	1	2	3	4	5	n>5
x[n]	0	0	2	4	6	4	2	0	0

Untuk domain – z akan didapatkan sebagai:

$$H(z) = 2 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + 2z^{-4}$$

Contoh 2:

Diketahui suatu sistem dalam domain-z memiliki bentuk seperti berikut:

$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + 3z^{-3} - 2z^{-5}$$

- Penyelesaian:

Dengan cara yang sama akan kita dapatkan bentuk sebagai berikut:

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n = 0 \\ -2 & n = 1 \\ 0 & n = 2 \\ 3 & n = 3 \\ 0 & n = 4 \\ -1 & n = 5 \\ 01 & n > 5 \end{cases}$$

Kita dapati bentuk dalam domain-n sebagai:

$$x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-3] - \delta[n-5]$$

2. Transformasi-z pada Suatu Filter FIR

Suatu filter FIR dalam persamaan beda:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k]$$

yang merupakan operasi konvolusi y[n]=x[n]*h[n]

Mengapa ???

Dalam hal ini penjelasannya adalah:

$h[n] = b_k = b_n$; yang merupakan koefisien-koefisien

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, \delta[n-k]$$

Jika x[n]=z_n berlaku untuk semua nilai n, maka:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k z^k$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k z^n z^{-k} = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \right)}_{\text{System Function Filter}} z^n$$

System Function Filter

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} h[k] z^{-k}$$

Maka:

$$h(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] \quad \Longleftrightarrow \quad H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

sehingga:

$$y[n] = h[n] * z^n = H(z) z^n$$

Contoh 3

Suatu filter FIR dinyatakan sebagai:

$$y[n] = 6x[n] - x[n-1] + x[n-2]$$

Dapatkan bentuk dalam domain-z dan nilai zeronya

Penyelesaian:

Dengan cara yang sama dengan logika pada contoh 1 maka didapatkan bentukdalam domain–z sebagai berikut:

$$H(z) = 6 - 5z^{-1} + z^{-2} = \left(3 - z^{-1}\right)\left(2 - z^{-1}\right) = 6\frac{\left(z - \frac{1}{3}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)}{z^{2}}$$

Dengan mengacu pada bentuk terakhir persamaan diatass, didapatkan bahwa nilai zero terjadi pada z = 1/3 dan z = ½

Contoh 4:

Suatu filter FIR memiliki system function dalam domain–n sebagai berikut:

$$h[n] = \delta[n] - 7\delta[n-2] - 3\delta[n-3]$$

Dapatkan representasinya dalam domain-z.

Penyelesaian:

Dengan cara yang sama kita dapatkan bentuk domain-z sebagai:

$$H(z) = 1 - 7z^{-2} - 3z^{-3}$$

Contoh 5:

Dapatkan bentuk respon impulse suatu filter FIR dengan system function yang direpresentasikan dalam domain–z sebagai berikut:

$$H(z) = 4\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right)\left(1 + 0{,}8z^{-1}\right)$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} H(z) &= 4\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1} + 0{,}8z^{-1} + 0{,}8z^{-2}\right) \\ &= 4\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + 1{,}8z^{-1} + 0{,}8z^{-2}\right) \\ &= 4\left(1 + 0{,}8z^{-1} - z^{-2} - 0{,}8z^{-3}\right) \\ &= 4 + 3{,}2z^{-1} - 4z^{-2} - 3{,}2z^{-3} \end{aligned}$$

$$H(n) = 4\delta[n] + 3{,}2\delta[n-1] - 4\delta[n-2] - 3{,}2\delta[n-3]$$

3. Transformasi-z sebagai Suatu Operator Unit Delay

Dalam domain waktu, unit-delay operator D didefinisikan sebagai:

y[n] = D{x[n]}= x[n-1]

semua tahu kalau x[n]=z^n bagi semua nilai n maka:

$$
\begin{aligned}
y[n] &= D\{x[n]\} = D\{z^n\} \\
&= z^{n-1} = z^{-1}z^n = z^{-1}x[n]
\end{aligned}
$$

maka:

y[n]=z^{-1}{x[n]}=x[n-1]

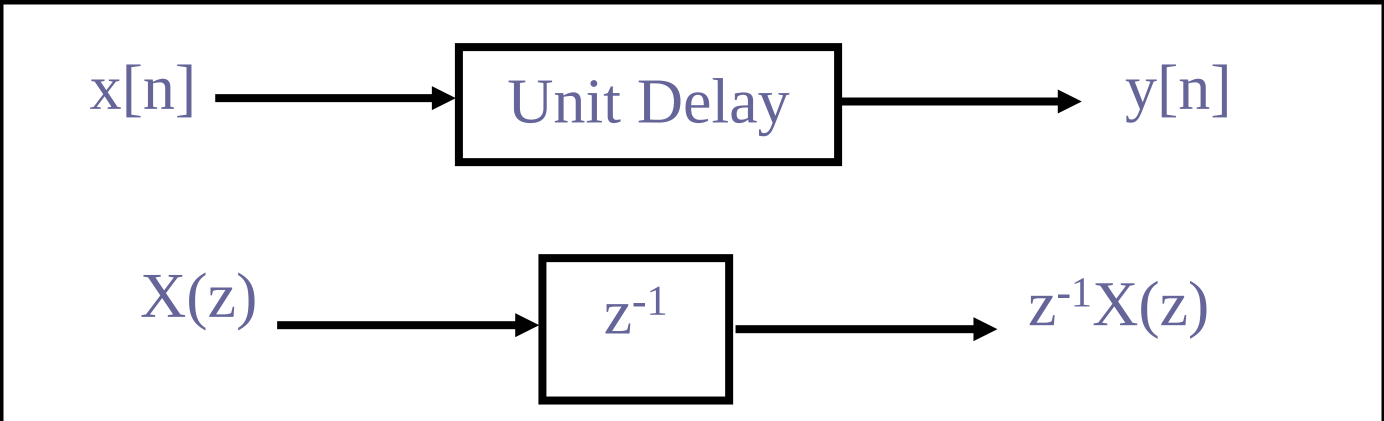
❖ Notasi Operator

y[n]=x[n]-x[n-1] ➔ dikenal sebagai "***first difference***" case

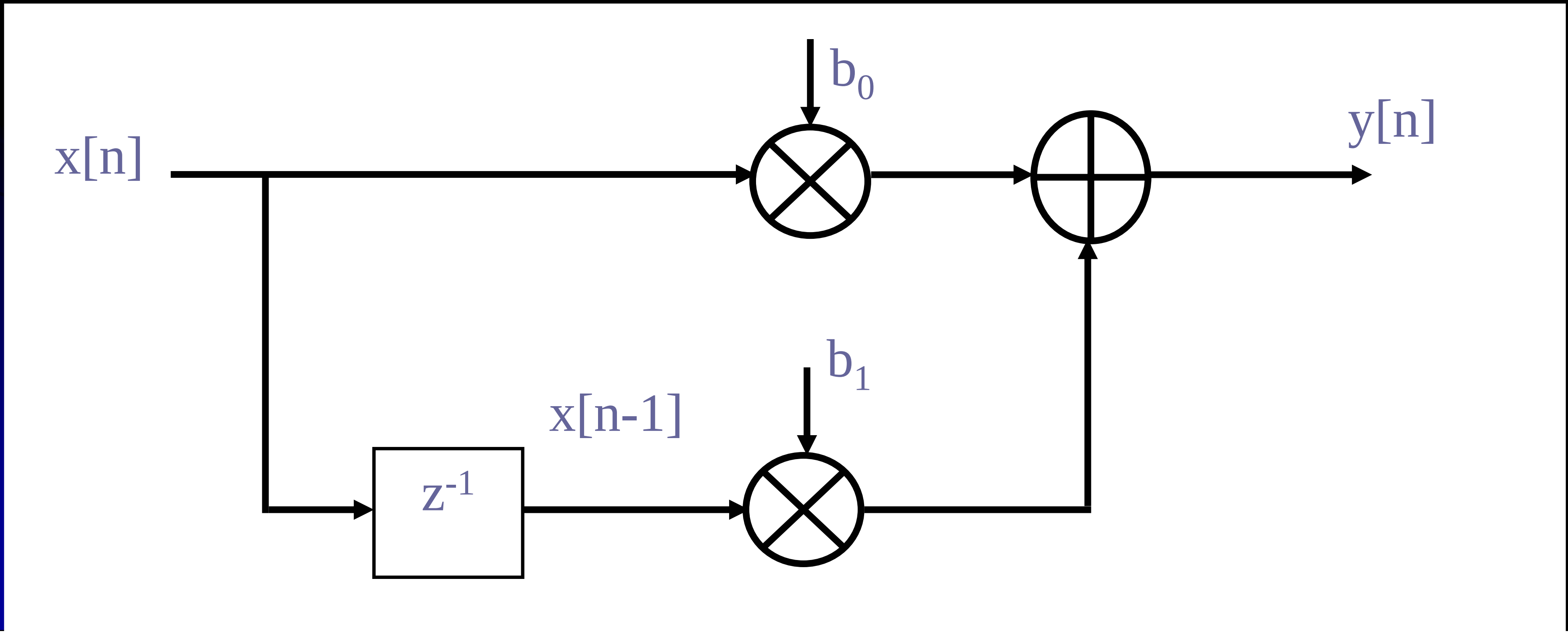
Operator dalam transformasi-z:

$$y[n] = \left(1 - z^{-1}\right)\{x[n]\}$$

❖ Diagram Blok



Realisasi untuk first difference y[n] = b0x[n] + b1x[n-1]
Adalah dalam bentuk seperti dibawah ini



4. Hubungan antara domain-z dan domain-ω

dalam hal ini kita tetapkan $\omega = \omega_s = \hat{\omega}$
sebagai besaran frekuen dalam satuan radian

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k} \Leftrightarrow H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^k$$

$$H(\omega) = H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

maka formulasinya kita dapatkan sebagai $z = e^{j\omega k}$

Jika suatu sinyal input z^n masuk ke suatu filter LTI, outputnya adalah $y[n]=H(z)z^n$

Jika nilai $z = e^{j\omega}$ $\Rightarrow$ maka $y[n] = H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}$

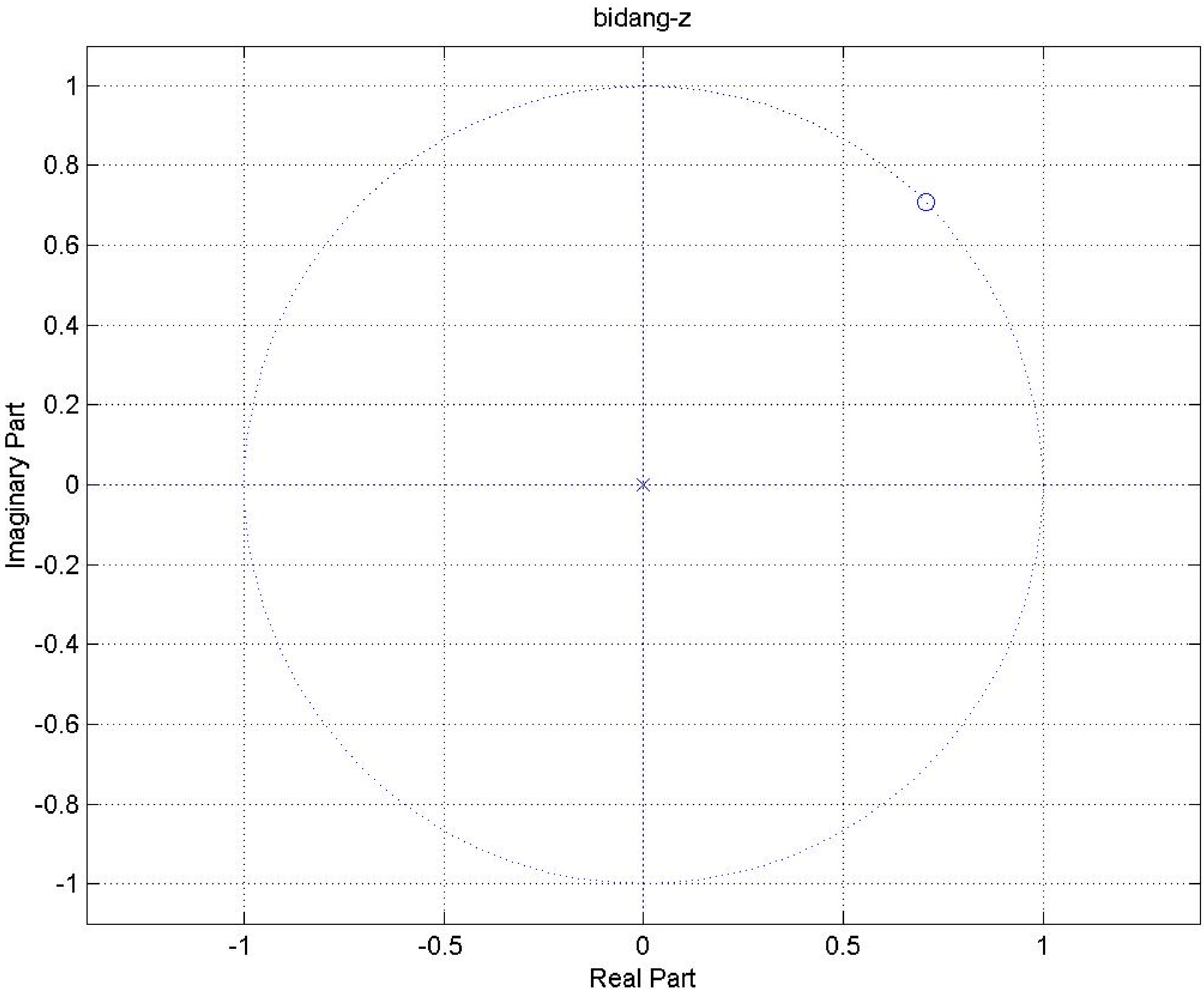
❖Bidang-z dan Unit Circle

- Respon frekuensi periodik dengan periode 2π,sehingga kita perlu melakukan evaluasi sepanjang satu periode $-\pi<\omega<\pi$
- Kita miliki nilai z → 1 satuan magnitudo
  → ω bervariasi dari $-\pi$ sampai π

nilai $z = e^{j\omega}$ → ada di suatu circle (lingkaran) dengan radius 1
→ disebut sebagai “unit circle”

Matlab Command:

```
zplane(0.5*sqrt(2)+j*0.5*sqrt(2),0)
grid
title('bidang-z')
```


bidang-z
Imaginary Part
Real Part
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.5
0
0.5
1

❖Zero dan Pole pada H(z)

Suatu filter FIR dicirikan oleh nilai-nilai zero-nya.
Misal sebuah filter FIR memiliki system function dalam domain-z sebagai berikut:

$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}$$

Bagimana lokasi zero dan pole pada sistem ini?

Persamaan system function diatas dapat dimodifikasi:

$$\begin{aligned} H(z) &= 1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3} \\ &= \left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - e^{j\pi/3} z^{-1}\right)\left(1 - e^{-j\pi/3} z^{-1}\right) \end{aligned}$$

Bisa juga dengan cara lain

$$H(z)\times\frac{z^3}{z^3} = \left(1-2z^{-1}+2z^{-2}-z^{-3}\right)\frac{z^3}{z^3}$$

$$= \frac{\left(z^3-2z^2+2z-1\right)}{z^3}$$

$$= \frac{(z-1)\left(z-e^{j\pi/3}\right)\left(z-e^{-j\pi/3}\right)}{z^3}$$

Kita ketahui lokasi zero adalah

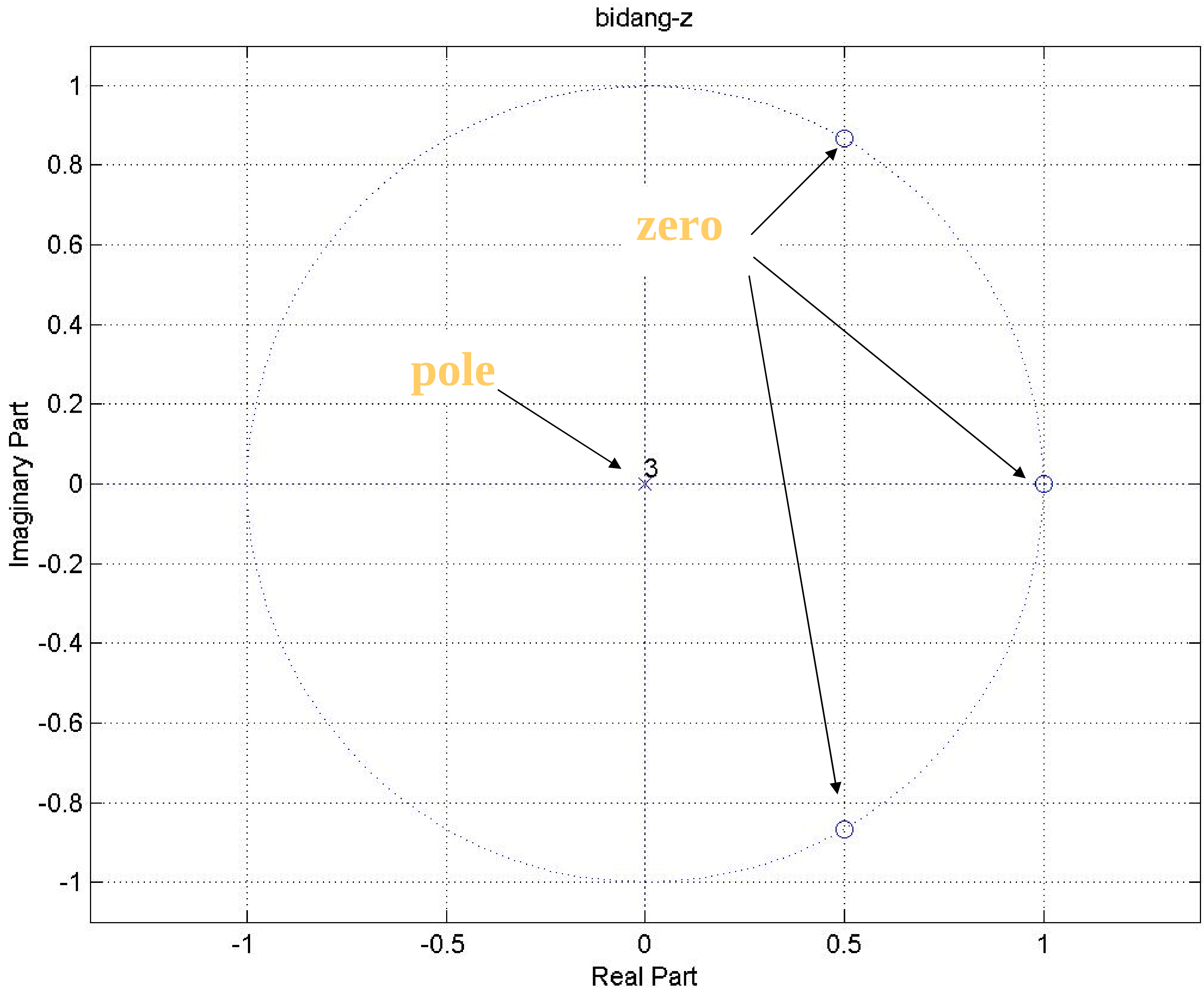
$$z=1, \quad z=e^{j\pi/3}, \qquad z=e^{-j\pi/3}$$

atau $z_3 = z_2^*$ ➔ komplek konjugate

Nilai z dimana H(z) = infinite disebut sebagai pole pada H(z), maka dalam hal ini pole terletak di z=0

Matlab Command:

```
B=[1;exp(j*pi/3);exp(-j*pi/3)];
A=[0;0;0];
zplane(B,A)
grid
title('bidang-z')
```



bidang-z
zero
pole
3
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
Imaginary Part
Real Part

❖ Nulling Filter

Jika pada bidang-z hanya mampu me-nol-kan sinyal dengan bentuk khusus $x[n] = z_0^n$
Sehingga untuk me-nol-kan input $x[n] = \cos(\omega_0 n)$ kita perlu proses cascade sebab:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}$$

Masing-masing eksponensial komplek ini dapat dibuang (di-nol-kan) dengan suatu *first-order FIR filter*, sehingga perlu dua filter first order untuk me-nol-kan sinyal $\cos(\omega_0 n)$.

Maka filter yang dibutuhkan:

memiliki dua zero pada $z_1 = e^{j\omega_0 n} \quad dan \quad z_2 = e^{-j\omega_0 n}$

sebagai second order FIR filter

Sinyal z_1^n → dinolkan oleh

$$
\begin{aligned}
H_1(z) &= 1 - z_1 z^{-1} \\
H_1(z_1) &= 0 \qquad \text{pada } z = z_1 \\
H_1(z_1) &= 1 - z_1 (z_1)^{-1} \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Sinyal z_2^n → dinolkan oleh $H_2(z) = 1 - z_2^n z^{-1}$

Maka nulling filter second order akan memiliki bentuk:

$$
\begin{aligned}
H(z) &= H_1(z) H_2(z) \\
&= (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) = 1 - (z_1 + z_2) z^{-1} + (z_1 z_2) z^{-2} \\
&= 1 - \left(e^{j\omega_0} + e^{-j\omega_0}\right) z^{-1} + \left(e^{j\omega_0} e^{-j\omega_0}\right) z^{-2} \\
&= 1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}
\end{aligned}
$$

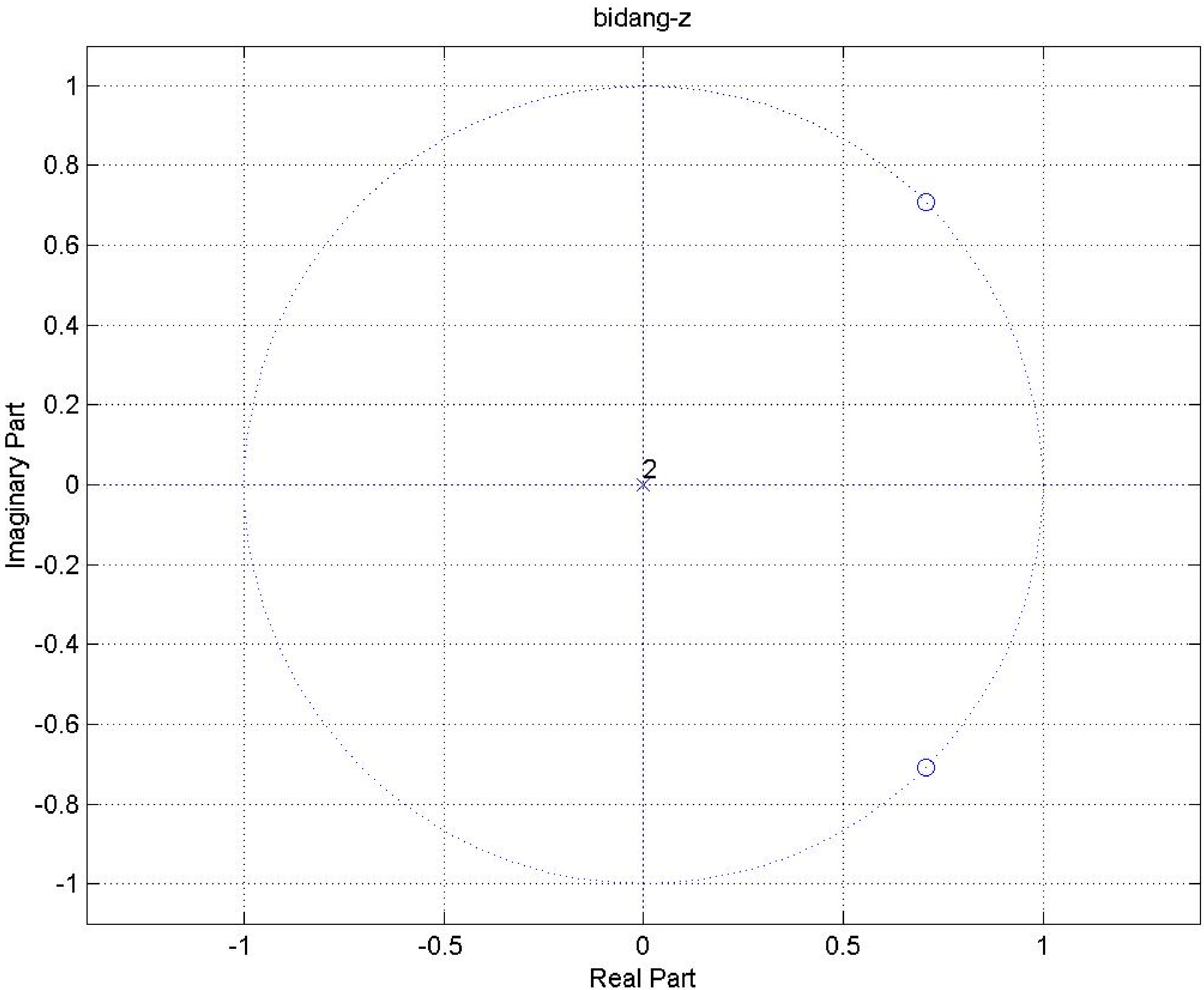
Zero terjadi pada nilai $z = e^{\pm j\pi/4}$

Persamaan diatas

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(\mathrm{z}) &= 1 - 2\cos(\omega_0)\mathrm{z}^{-1} + \mathrm{z}^{-2} \\ &= 1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2} \end{aligned}$$

Sehingga filter ini akan me-nol-kan sinyal cos(0,25π) dari suatu input yang masukke FIR filter yang memiliki bentuk dalam persamaan beda sebagai berikut:

$$y[n] = x[n] - \sqrt{2}x[n-1] + x[n-2]$$


bidang-z
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
Imaginary Part
2
-1
-0.5
0
0.5
1
Real Part

❖ Relasi secara Grafik bidang-z dengan bidang-ω

Suatu FIR filter dengan system function sebagai berikut:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{10} z^{-k}$$

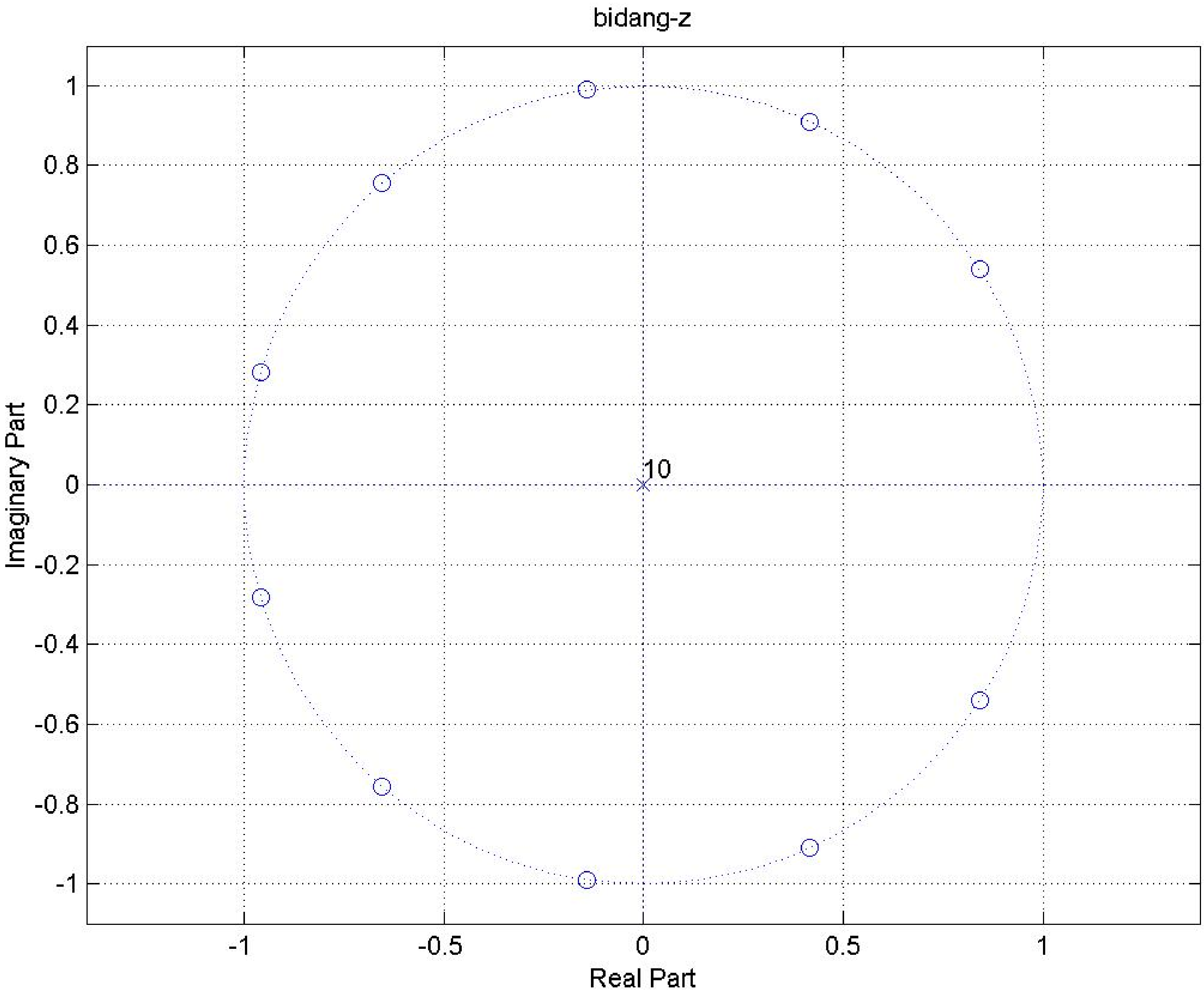
– punya zero yang terletak di unit circle, yaitu ω = 2πk/11 → untuk nilai k =1,2,…10
– pole di z = 0

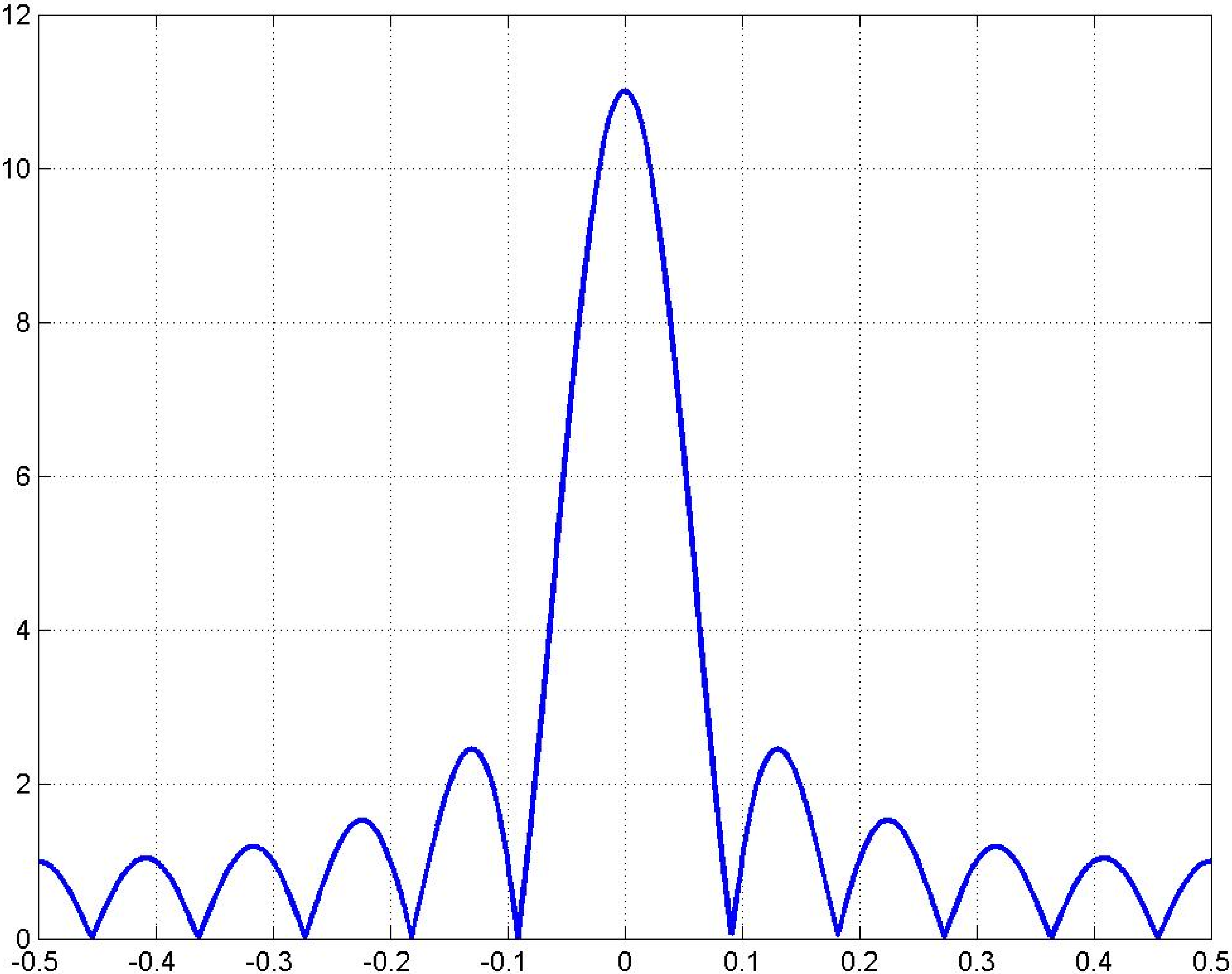
$$H(z) = \left(1 - e^{-j2\pi/11} z^{-1}\right)\left(1 - e^{-j4\pi/11} z^{-1}\right)\ldots\left(1 - e^{-j20\pi/11} z^{-1}\right)$$

$$z^{-k} \rightarrow e^{-j\omega k} = e^{-j\pi k/11}$$

Memiliki zero yang tersebar di 10 titik secara uniform pada unit circle dalam bidang-z. Dalam bidang–ω → respon frekuensinya adalah sbb:

```
w=-pi:.01:pi;
H_w = 1 + exp(-j*w) + exp(-j*w*2) + exp(-j*w*3)+ exp(-j*w*4)+
exp(-j*w*5)+ exp(-j*w*6)+ exp(-j*w*7)+ exp(-j*w*8)+ exp(-j*w*9)+
exp(-j*w*10);
plot(0.5*w/pi,abs(H_w),'linewidth',2)
grid
```


bidang-z
Imaginary Part
Real Part
10
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.5
0
0.5
1


12
10
8
6
4
2
0
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

5. Band Pass Filter

Sebelum kita masuk ke band pass filter, kita bicara dulu yang namanya running-sum filter.

❖ **L-Point Running Sum Filter**

Bentuk umum:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{L-1} x[n-k]$$

Memiliki fungsi system sebagai:

$$H[z] = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k}$$

Suatu deret geometri

$$H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} = \frac{1-z^{-L}}{1-z^{-1}} = \frac{z^{L}-1}{z^{L}(z-1)} \quad \textbf{(1)}$$

Numerator (pembilang)

Denumerator (penyebut)

Juga dikenal sebagai
"the L-th roots of unity"
Zero pada H(z):
$z^{-L} - 1 = 0 \Rightarrow z^{L} = 1$ **(2)**

Juga dikenal sebagai
"the L-th roots of unity"

dengan $e^{j2\pi k} = 1$ untuk nilai k integer
maka $z = e^{j2\pi k/L}$ untuk k=0,1,2,…..L-1 **(3)**

Pada denominator 0 terjadi pada z = 0 atau z = 1
Karena akar ke-L adalah satu satuan z = 1, maka zero pada numerator yangmeng-cancell yang terjadi pada z = 1. Sehingga pole pada z = 0.

Persamaan system function bisa ditulis kembali sebagai:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} = \prod_{k=1}^{L-1} \left(1 - e^{j2\pi k/L} z^{-1}\right)$$ **(4)**

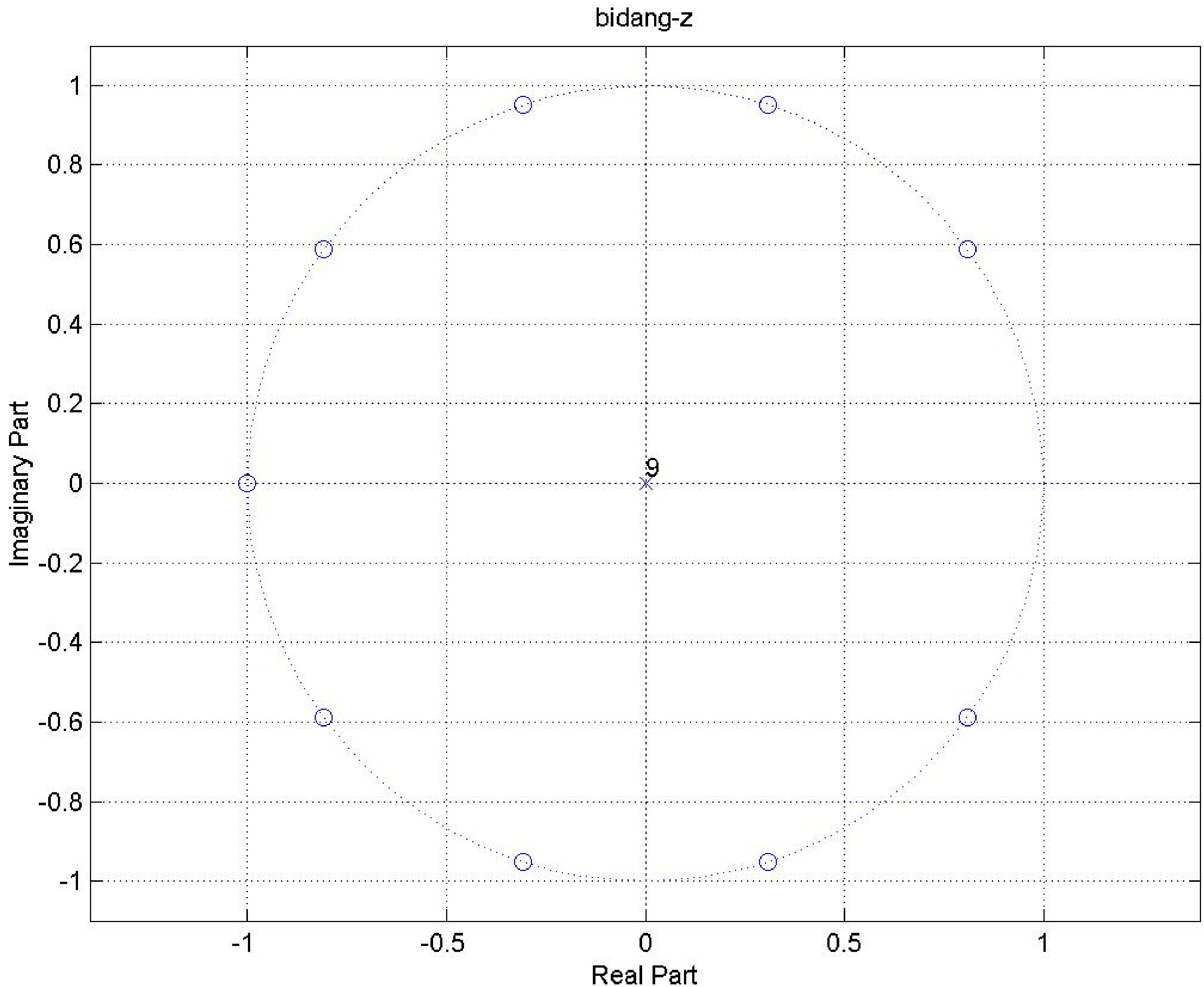
Misal pada kasus dimana L=10, system function ini menjadi

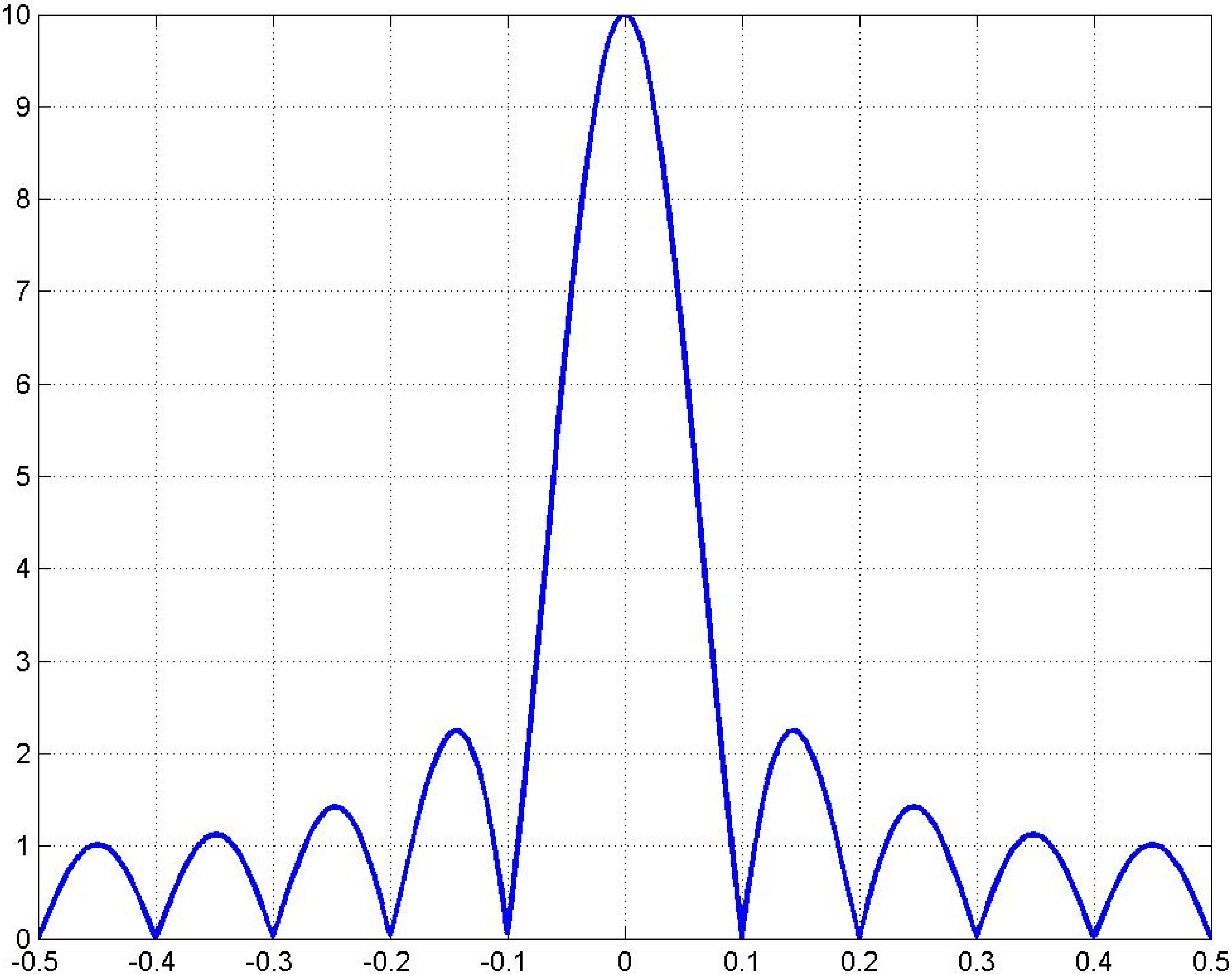
$$H(z) = \sum_{k=0}^{9} z^{-k} = \frac{1 - z^{-10}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{10} - 1}{z^{9}(z-1)} \qquad \textbf{(5)}$$

Dari persamaan (5) akan menghasilkan 10 titik zero yang tersebar secara uniform pada lingkaran (diagram-z) sesuai dengan $z = e^{j2\pi k/L}$ untuk nilai k = 0,1,2,…9. Karena suatu kondisi untuk z=1 antara pole dan zero saling meng-*cancell* (menghilangkan) maka tidak muncul dalam bidang–z.

Matlab Code:

```
B=[exp(j*2*pi/10);exp(j*4*pi/10);exp(j*6*pi/10);exp(j*8*pi/10);exp(j*10*pi/10);exp(j*12*
pi/10);exp(j*14*pi/10);exp(j*16*pi/10);exp(j*18*pi/10)];
A=[0;0;0;0;0;0;0;0;0];
figure(1)
zplane(B,A)
grid
title('bidang-z')
w=-pi:.01:pi;
H_w = 1 + exp(-j*w) + exp(-j*w*2) + exp(-j*w*3)+ exp(-j*w*4)+ exp(-j*w*5)
+ exp(-j*w*6)+ exp(-j*w*7)+ exp(-j*w*8)+ exp(-j*w*9);
figure(2)
plot(0.5*w/pi,abs(H_w),'linewidth',2)
grid
```


bidang-z
Imaginary Part
Real Part
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
9


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

❖Suatu Band Pass Filter Komplek

Pada LPF posisi w=0 digeser sehingga polenya bergeser.

Saat $\omega \neq 0$ → bandpass filter

System function menjadi: $$H(z) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq ko}}^{L-1} \left(1 - e^{j2\pi k/L} z^{-1}\right) \quad \textbf{(6)}$$

k_0 menunjukkan kondisi $z = e^{j2\pi k/L} z^{-1}$

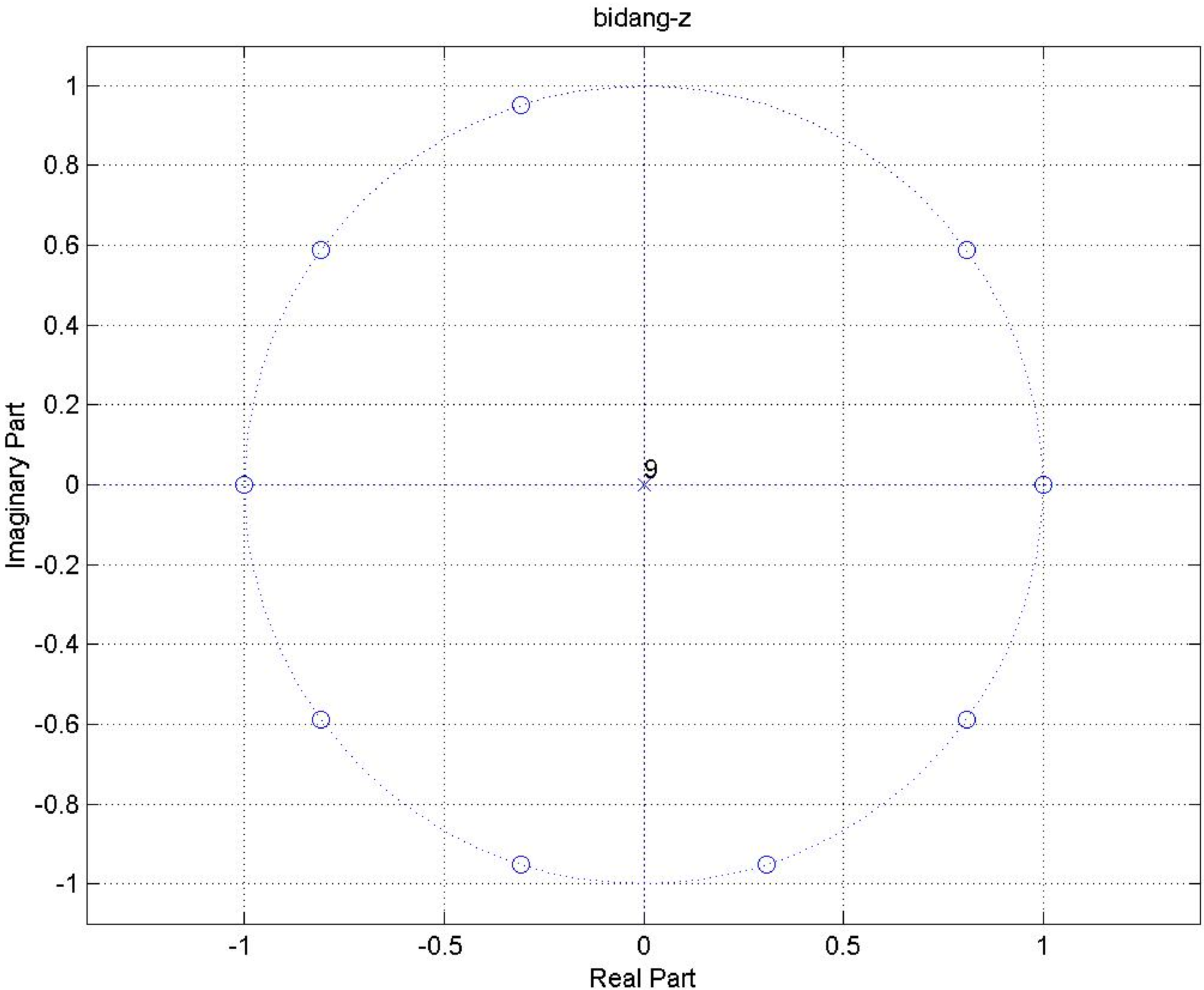
dihindari → tidak muncul

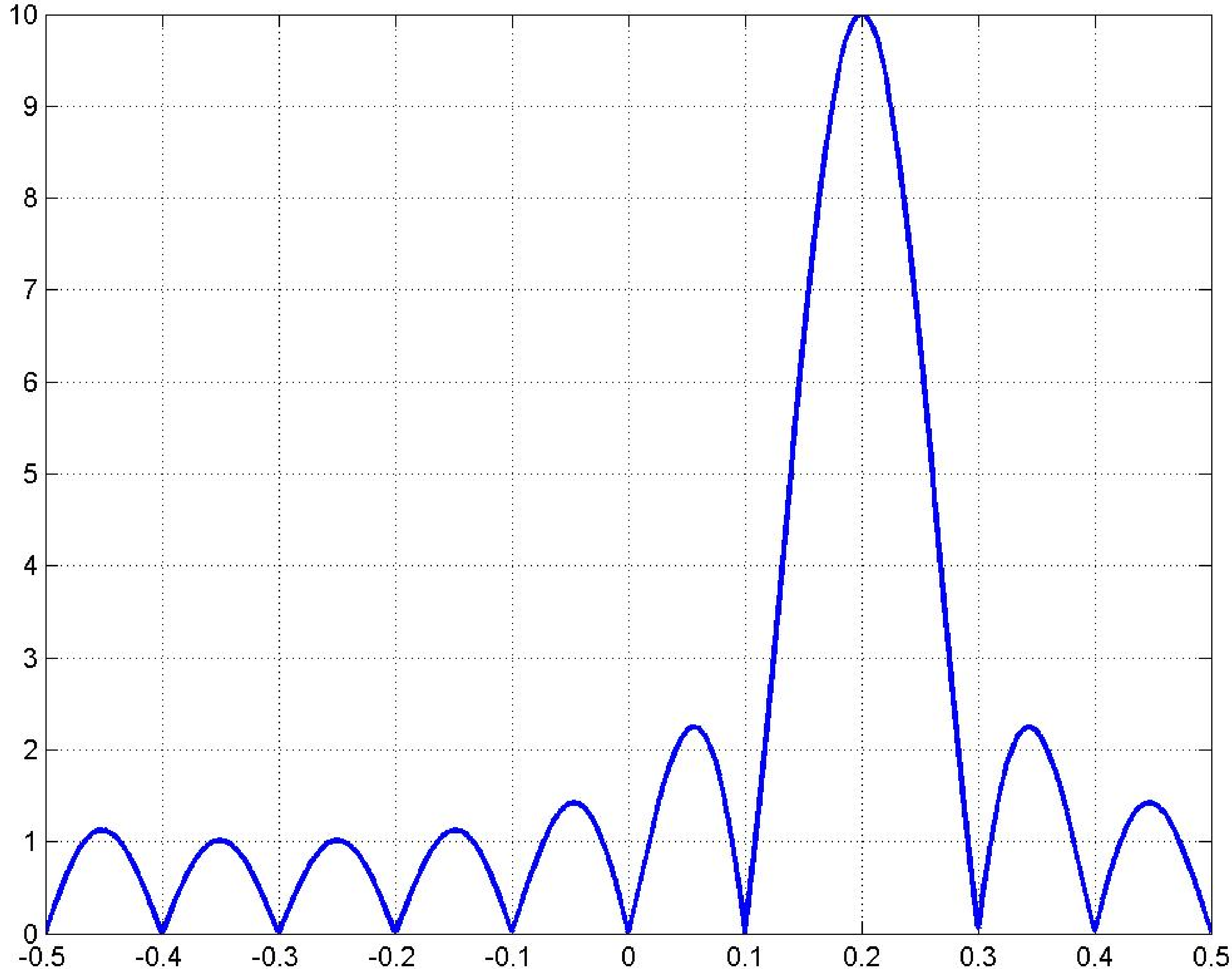
Misal disini k_0 = 2, dan L =10 akan memberikan: Interval $\omega = \dfrac{2\pi k_0}{L}$

Peak pada k_0 = 2 ⇨ Band Pass Filter

Matlab Code:

```
B=[1;exp(j*2*pi/10);exp(j*6*pi/10);exp(j*8*pi/10);exp(j*10*pi/10);exp(j*12*pi/10);
   exp(j*14*pi/10);exp(j*16*pi/10);exp(j*18*pi/10)];
A=[0;0;0;0;0;0;0;0;0];
figure(1)
zplane(B,A)
grid
title('bidang-z')
w=-pi:.01:pi;
H_w = (1 - exp(j*0*pi/10-j*w)).*(1 - exp(j*2*pi/10-j*w)).*(1 - exp(j*2*3*pi/10-j*w)).
        *(1 - exp(j*2*4*pi/10-j*w)).*(1 - exp(j*2*5*pi/10-j*w)).
        *(1 - exp(j*2*6*pi/10-j*w)).*(1 - exp(j*2*7*pi/10-j*w)).
        *(1 - exp(j*2*8*pi/10-j*w)).*(1 - exp(j*2*9*pi/10-j*w)) ;
figure(2)
plot(0.5*w/pi,abs(H_w),'linewidth',2)
grid
```


bidang-z
Imaginary Part
Real Part
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
9

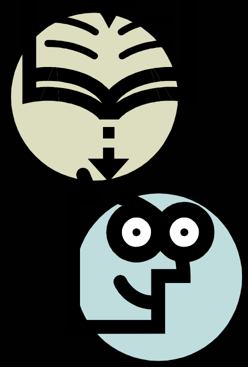


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-0.5
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

Perhatikan **Persamaan (6)** yang telah diberikan diatas…

- efektif untuk melihat respon frekuensi
- tidak efektif untuk mencari koefisien-koefisien pada Band Pass Filter

Solusinya ????.....



Solusi 1: Suatu Operator Baru H(z) = G(z/r)

Solusi 2: Dengan Menghitung Secara Langsung

Solusi 1: Suatu Operator Baru H(z) = G(z/r)

Misal $G(z) = z^2 - 3z + 2 = (z-2)(z-1)$

$$
\begin{aligned}
H(z) &= G\left(\frac{z}{r}\right) = \left(\frac{z}{r}\right)^2 + 3\left(\frac{z}{r}\right) + 2 \\
&= \frac{z^2 + 3rz + 2r^2}{r^2} \\
&= \frac{(z-2r)(z-r)}{r^2}
\end{aligned}
$$

2 Akar pada H(z) adalah z=2r dan z=r.

Pada kasus BPF G(z)➔running-sum system function:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-1}$$

r = komplek exponensial = $e^{j2\pi k o/L}$

Perkalian dengan eksponensial komplek, menghasilkan perputaran sudut dengan $e^{j2\pi ko/L}$ ➔ perputaran (pergeseran) sebesar $j2\pi ko/L$

$$H(z) = G\left(\frac{z}{2}\right) = G(ze^{-j2\pi k_0/L})$$
$$= \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} e^{j2\pi k_0 k/L}$$

sehingga koefisien-koefisien pada bandpass filter komplek adalah:

$$b_k = e^{j2\pi k_0 k/L}$$ untuk nilai k=0,1,2,…L-1 **(7)**

Solusi 2: Dengan Menghitung Secara Langsung

$$H(e^{j\hat{\omega}}) = \sum_{k=0}^{L-1} e^{j2\pi k_0 k/L} e^{-j\hat{\omega}k}$$

$$= \sum_{k=0}^{L-1} e^{-j\left(\hat{\omega}-2\pi k_0/L\right)k} = G\left(e^{-j\left(\hat{\omega}-2\pi k_0/L\right)}\right) \quad \textbf{(8)}$$

Persamaan (8) menunjukkan respon frekuensi pada persamaan (7) yang tergeser dengan nilai sebesar 2πko/L

❖Suatu Band Pass Filter dengan Koefisien-Koefisien Real

Bagaimana cara mendesain dengan koefisien-koefisien tidak komplek???

Band Pass Filter koefisien real

$$\boxed{b_k = \cos(2\pi k_0 k / L)}$$

➔ k=0,1,2,…L-1

Ekspansi z^{-k} dalam terminologi komplek eksponensial memberikan:

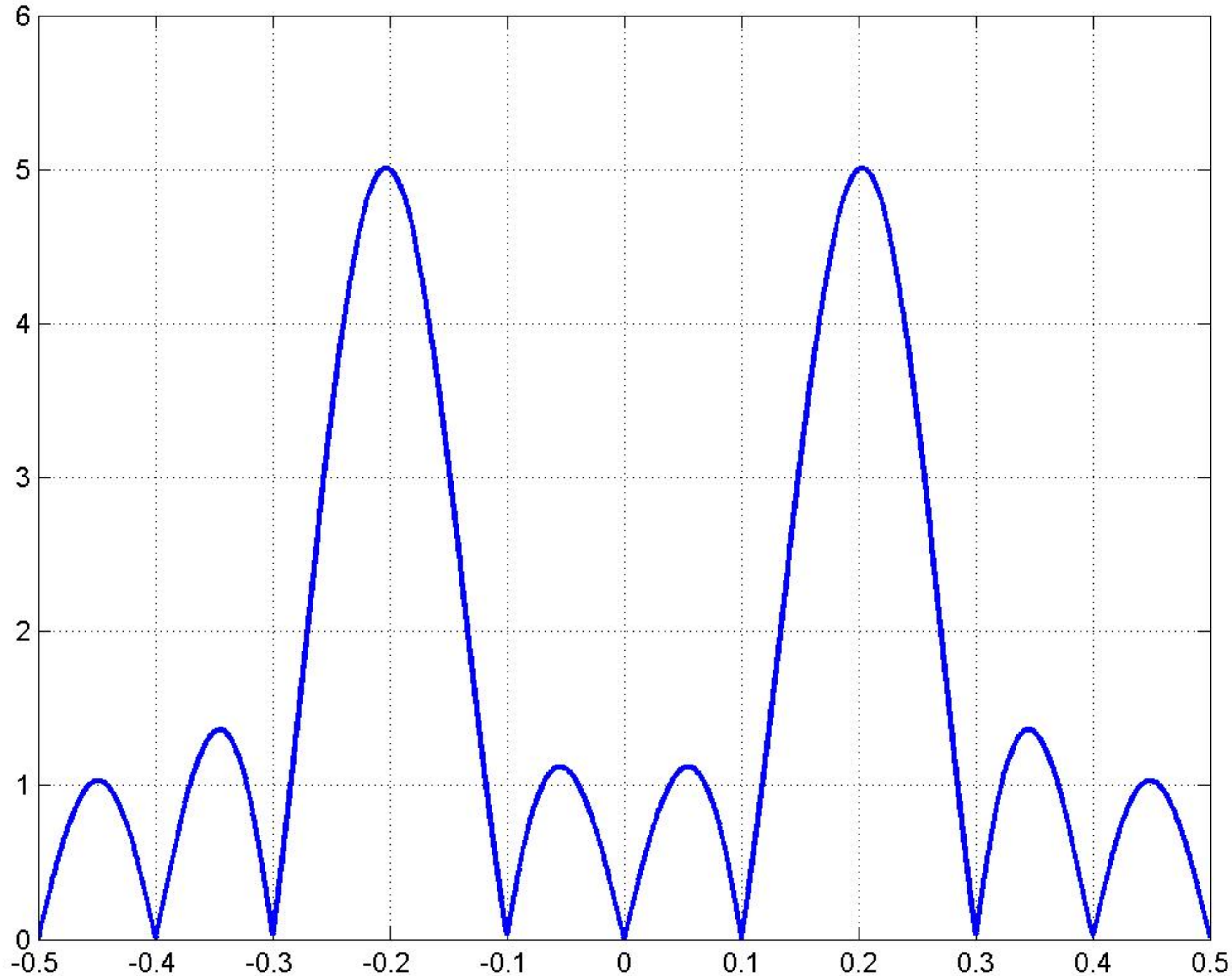
$$\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{k=0}^{L-1} \left(\cos(2\pi k_0 k / L)\right) z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} \left(\frac{1}{2} e^{j2\pi k_0 k / L} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi k_0 k / L} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} e^{j2\pi k_0 k / L} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} e^{-j2\pi k_0 k / L} \\
&= H_1(z) + H_2(z)
\end{aligned}$$

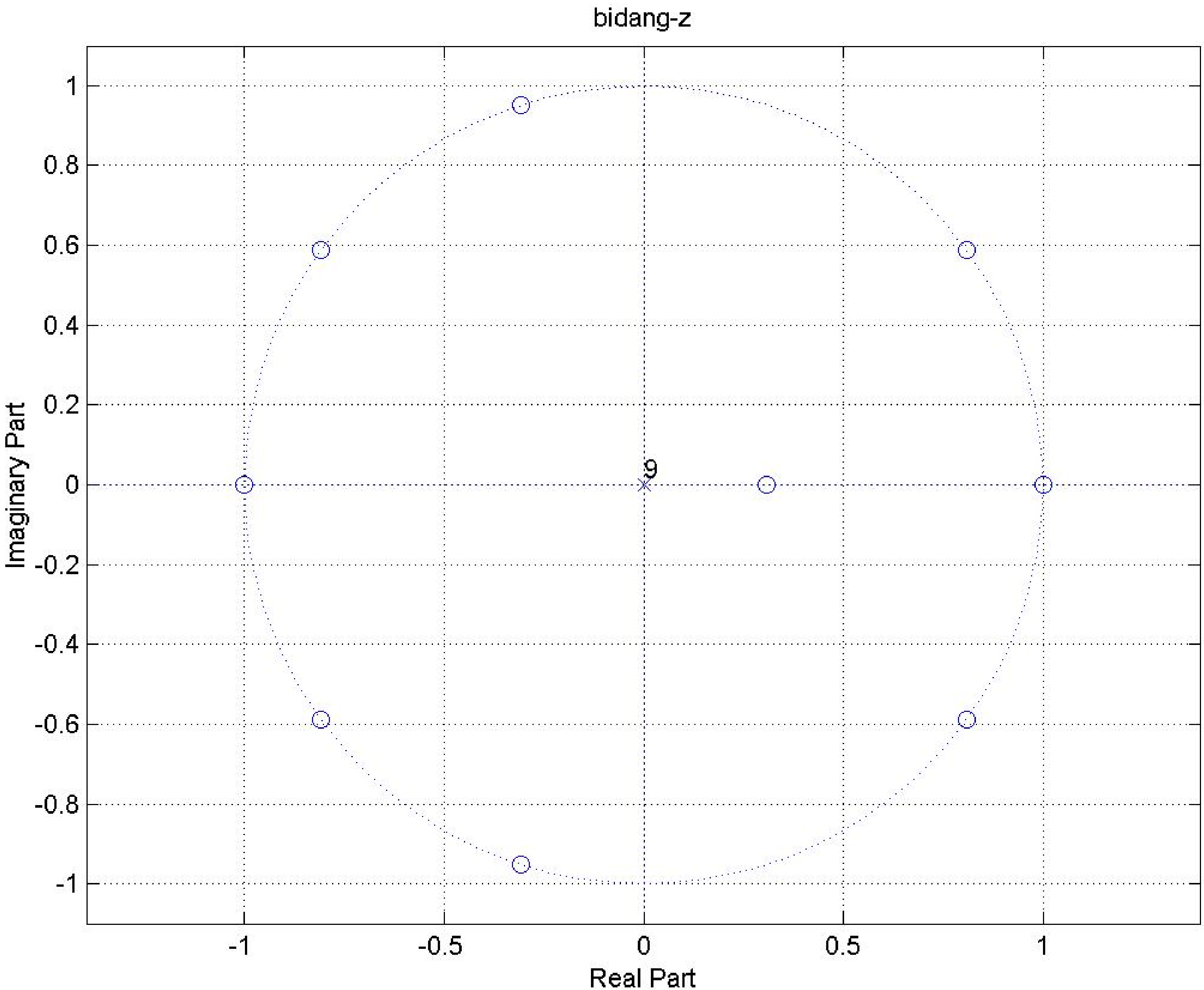
H1(z): BPF complek dengan center freq di 2πk0/L
H1(z): BPF complek dengan center freq di -2πk0/L
Untuk k_0 = 2 dan L = 10, respon frekuensinya

Matab Code

```
B=[cos(0.4*pi);1;exp(j*2*pi/10);exp(j*6*pi/10);exp(j*8*pi/10);exp(j*10*pi/10);
exp(j*12*pi/10);exp(j*14*pi/10);exp(j*18*pi/10)];
A=[0;0;0;0;0;0;0;0;0];
figure(1)
zplane(B,A)
grid
title('bidang-z')
w=-pi:.01:pi;
H1_w = (1 - exp(j*0*pi/10-j*w)).*(1 - exp(j*2*pi/10-j*w)).*(1 - exp(j*2*3*pi/10-j*w)).
*(1 - exp(j*2*4*pi/10-j*w)).*(1 - exp(j*2*5*pi/10-j*w)).*(1 - exp(j*2*6*pi/10-j*w)).
*(1 - exp(j*2*7*pi/10-j*w)).*(1 - exp(j*2*8*pi/10-j*w)).*(1 - exp(j*2*9*pi/10-j*w)) ;
H2_w = (1 - exp(-j*0*pi/10-j*w)).*(1 - exp(-j*2*pi/10-j*w)).*(1 - exp(-j*2*3*pi/10-j*w)).
*(1 - exp(-j*2*4*pi/10-j*w)).*(1 - exp(-j*2*5*pi/10-j*w)).*(1 - exp(-j*2*6*pi/10-j*w)).
*(1 - exp(-j*2*7*pi/10-j*w)).*(1 - exp(-j*2*8*pi/10-j*w)).*(1 - exp(-j*2*9*pi/10-j*w)) ;
H_w = 0.5*H1_w + 0.5*H2_w;
figure(2)
plot(0.5*w/pi,abs(H_w),'linewidth',2)
grid
```

ada 2 peak (puncak) pada $\hat{\omega} = \pm 4\pi / 10 \Rightarrow 2$
zero hilang pada unit circle pada sudut $\pm\, 4\pi/10$




bidang-z
Imaginary Part
Real Part
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
9