Respon Frekuensi pada FIR Filter

Oleh:Tri Budi Sanrtoso
Lab Sinyal, EEPIS-ITS

Respon sinusoida pada sistem FIR

Suatu sistem FIR dinyatakan:
$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] = \sum_{k=0}^{M} h[k] x[n-k] \quad (1)$$

Sinyal input secara umum merupakan bentuk komplek diskrit

$$x[n] = Ae^{j\phi} e^{j\omega_s n}$$

$$x[n-k] = Ae^{j\phi} e^{j\omega_s (n-k)}$$

Karena $\phi = 0$ dan A = 1,
maka bentuk tsb menjadi:

$$x[n-k] = e^{j\omega_s (n-k)}$$

$\omega_s = \omega T_s$ ➔ merupakan frekuensi ternormalisasi terhadap periode sampling yang digunakan

Sehingga bentuk umum FIR menjadi:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{j\omega_s(n-k)}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega_s k} e^{j\omega_s n}$$

$$y[n] = H(\omega_s) e^{j\omega_s n}$$

dimana:

$$H(\omega_s) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega_s k} = \sum_{k=0}^{M} h[k] e^{-j\omega_s k} \qquad (2)$$

yang lebih dikenal sebagai fungsi respon frekuensi untuk sistem tersebut, dan seperti anda kenal dalam istilah komunikasi sebagai "*respon frekuensi*"

Respon Frekuensi → merupakan bentuk komplek

$$H(\omega_s) = \mathrm{Re}\{H(\omega_s)\} + j\,\mathrm{Im}\{H(\omega_s)\} = |H(\omega_s)| e^{j\angle H(\omega_s)} \qquad (3)$$

dimana:

$|H(\omega s)|$=magnitudo dan $\angle H(\omega_s)$ = fase

Maka persamaan (2) menjadi:

$$y[n] = |H(\omega_s)| e^{j\angle H(\omega_s)} A e^{j\phi} e^{j\omega_s n} = \left(|H(\omega_s)| A\right) e^{j(\angle H(\omega_s) - \phi)} e^{j\omega_s n}$$

Contoh 1:

Suatu sistem LTI memiliki koefisien-koefisien pada persamaan beda sbb: {bk}={1 , 2 , 1}. Bagaimana bentuk respon frekuensinya?

Penyelesaian:

Dengan persamaan (1) diperoleh

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega_s k}$$

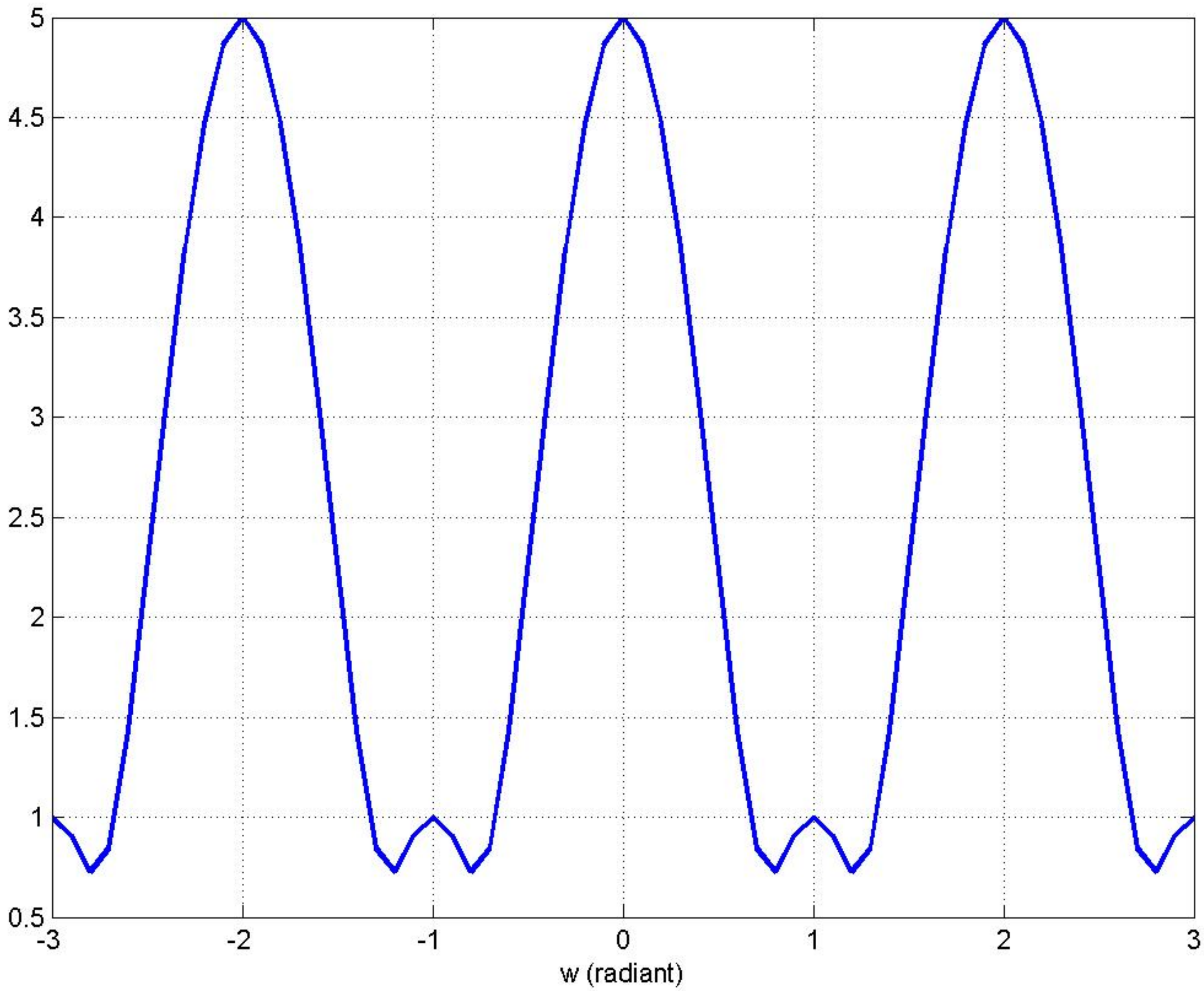
$$= 1 + 2e^{-j\omega_s} + e^{-j2\omega_s}$$

Untuk mendapatkan respon magnitudo dan respon fasenya:

$$H(\omega_s) = 1 + 2e^{-j\omega_s} + e^{-j2\omega_s} = e^{-j\omega_s}\left(e^{j\omega_s} + 2 + e^{-j\omega_s}\right)$$

Contoh Program Matlab

```
clear all;
w=-3:.1:3;
y = 1 + 2*exp(-j*w*pi) + 2*exp(-j*2*w*pi);
plot(w,abs(y),'linewidth',2)
grid
xlabel('w (radiant)')
```


5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-3
-2
-1
0
1
2
3
w (radiant)

Anda coba untuk mengingat kembali persamaan Euler:

$$
\begin{array}{l}
e^{j\omega_s} = \cos\omega_s + j\sin\omega_s \\
e^{-j\omega_s} = \cos\omega_s - j\sin\omega_s \\
\rule{6cm}{0.4pt}\,+ \\
e^{j\omega_s} + e^{-j\omega_s} = 2\cos\omega_s
\end{array}
$$

Maka:

$$
\begin{aligned}
H(\omega_s) &= e^{-j\omega s}\left(2 + 2\cos\omega_s\right) \\
&= \left(2 + 2\cos\omega_s\right)e^{-j\omega s}
\end{aligned}
$$

dimana:
2+2cosωs → merupakan magnitudo
-ωs → fase

Contoh 2:

Jika input sinyal $x[n]=2e^{j\pi/4}\, e^{j\pi n/3}$ diberikan ke sistem FIR pada soal sebelumnya, bagaimana bentuk outputnya?

Penyelesaian:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]x[n-k] = \left(\left|H(\omega_s)\right|A\right)e^{j\left(\angle H(\omega_s)+\phi\right)}e^{j\omega_s n}$$

ganti ωs dengan π/3 maka:

H(ωs) = H(π/3) = 2 + 2cos(π/3) = 2 + 2(½) + 3

$\angle H(\omega_s) = -\pi/3$ sementara ϕ = 0

sehingga:

$$\begin{aligned} y[n] &= 3e^{-j\pi/3}\, 2e^{j\pi/4}\, e^{j\pi/3} \\ &= (3)(2)\, e^{(j\pi/4 - j\pi/3)}\, e^{j\pi/3} \\ &= (6)\, e^{-j\pi/12}\, e^{j\pi/3} \\ &= (6)\, e^{j\pi/4}\, e^{j\pi(n-1)/3} \end{aligned}$$

Sifat-sifat Respon Frekuensi → FIR Filter

1. Hubungan dengan Respon Impuls dan Persamaan Beda

$$b_k = h[k] \Rightarrow b_k e^{-j\omega_s k} = h[k]e^{-j\omega_s k}$$

Respon impulse → tersusun dari sekuen impulse koefisien-koefisien FIR

Secara umum:

Time Domain:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M} h[k]\delta[n-k]$$

Frequency Domain:

$$H[\omega_s] = \sum_{k=0}^{M} h[k]e^{-j\omega_s k}$$

Contoh 1:

Sebuah FIR memiliki respon inpulse seperti berikut:

h[n] = -δ[n] + 3δ[n-1] – δ[n-2]

Sistem ini memiliki {bk} = {-1, 3, -1}

Maka bentuk persamaan ini dapat ditransformasi:

Persamaan Beda:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] = -x[n] + 3x[n-1] - x[n-2]$$

REspon Frekuensi:

$$H(\omega_s) = -1 + 3e^{-j\omega_s} - e^{-j2\omega_s}$$

Contoh 2:

JIka diketahui respon frekuensi FIR filter sbb:

$$H\left(\omega_s\right) = e^{-j\omega_s}\left(3 - 2\cos\omega_s\right)$$

Bagaimana bentuk persamaan beda-nya?

<u>Jawab:</u>

Persamaan Euler:

$$\cos\omega_s = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_s} + e^{-j\omega_s}\right)$$

$$H\left(\omega_s\right) = e^{-j\omega_s}\left(3 - 2\left(\frac{e^{j\omega_s} + e^{-j\omega_s}}{2}\right)\right)$$

Persamaan Beda:

y[n]= -x[n] +3x[n-1] -x[n-2]

2. Periodisitas $H(\omega_s)$

Respon frekuensi $H(\omega_s)$ selalu periodik sebagai fungsi ω_s pada setiap nilai 2π radiant.

$H(\omega_s) = H(\omega_s + 2\pi)$???

➔ dapat dibuktikan seperti berikut ini

$$
\begin{aligned}
H(\omega_s + 2\pi) &= \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j(\omega_s + 2\pi)k} \\
&= \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega_s k} e^{-j2\pi k} \\
&= \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega_s k} \qquad ; dengan\ k = \text{int}\, eger \\
&= H(\omega_s)
\end{aligned}
$$

Representasi Grafik pada Respon Frekuensi

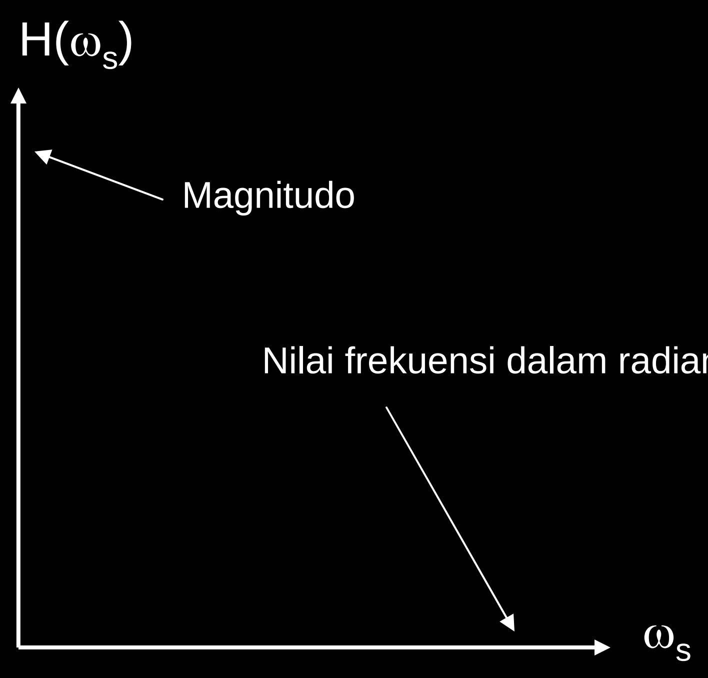
Dua poin penting yang harus “di-emhpasized” tentang respon frekuensi:

1. Respon frekuensi biasanya memiliki nilai bervariasi sesuai perubahan nilai frekuensinya
2. Pemilihan koefisien b_k akan menentukan bentuk respon frekuensinya

Untuk memvisualisasikan $H(\omega_s)$

↓

Harus menggambarkan dalam sistem koordinat berikut ini



Kasus pada suatu system dengan delay:

y[n] = x[n-n0]

Sistem ini memiliki koefisien filter non-zero di bn0 =1, sehingga respon frekuensinya adalah:….

Coba anda kembali melihat persamaan dasar

$k = n0$

$b_k \Rightarrow b_{n0} = 1$

Maka

$$H(\omega_s) = 1.e^{-j\omega_s n_0} = e^{-j\omega_s n_0}$$

Kasus pada sistem persamaan beda orde 1

y[n] = x[n]-x[n-1]

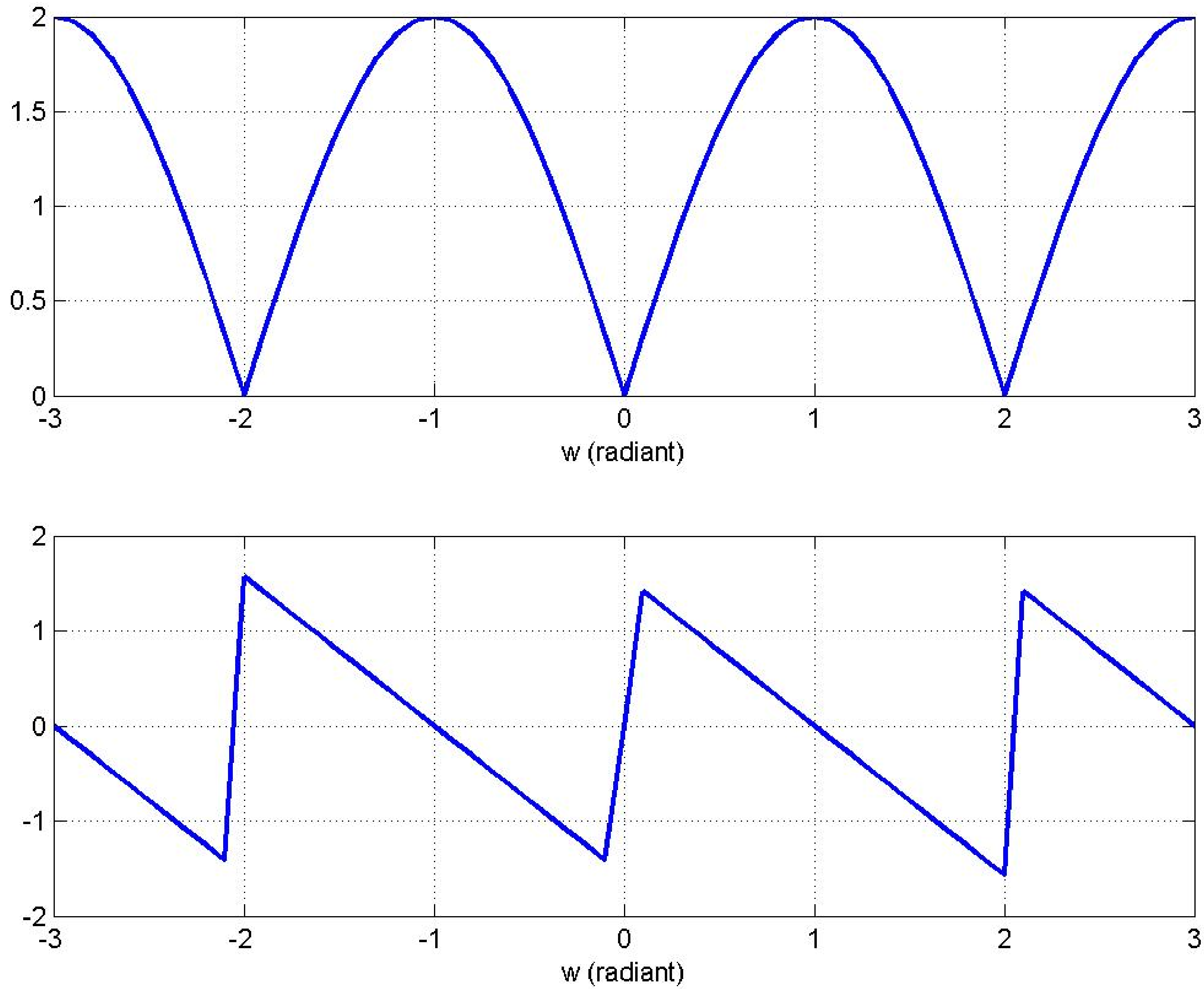
Respon Frekuensinya adalah

$$
\begin{aligned}
H(\omega_s) &= 1 - e^{-j\omega_s} = 1 - \cos\omega_s + \sin\omega_s \\
&= e^{-j\omega_s/2}\left(e^{j\omega_s/2} - e^{-j\omega_s/2}\right) = e^{-j\omega_s/2}.2\sin\left(\omega_s/2\right) \\
&= 2\sin\left(\omega_s/2\right)e^{-j\omega_s/2} = 2\sin\left(\omega_s/2\right)e^{j\left(\pi/2-\omega_s/2\right)}
\end{aligned}
$$

Program Matlab

```
clear all;
w=-3:.1:3;
y=1-exp(-j*w*pi);
subplot(2,1,1)
plot(w,abs(y),'linewidth',2)
grid
xlabel('w (radiant)')

subplot(2,1,2)
plot(w,y_phase,'linewidth',2)
grid
xlabel('w (radiant)')
```


2
1.5
1
0.5
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
w (radiant)
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
w (radiant)

Re{H(ω_s)}= 1- cos ω_s; dan Im{H(ω_s)}= sin ω_s;

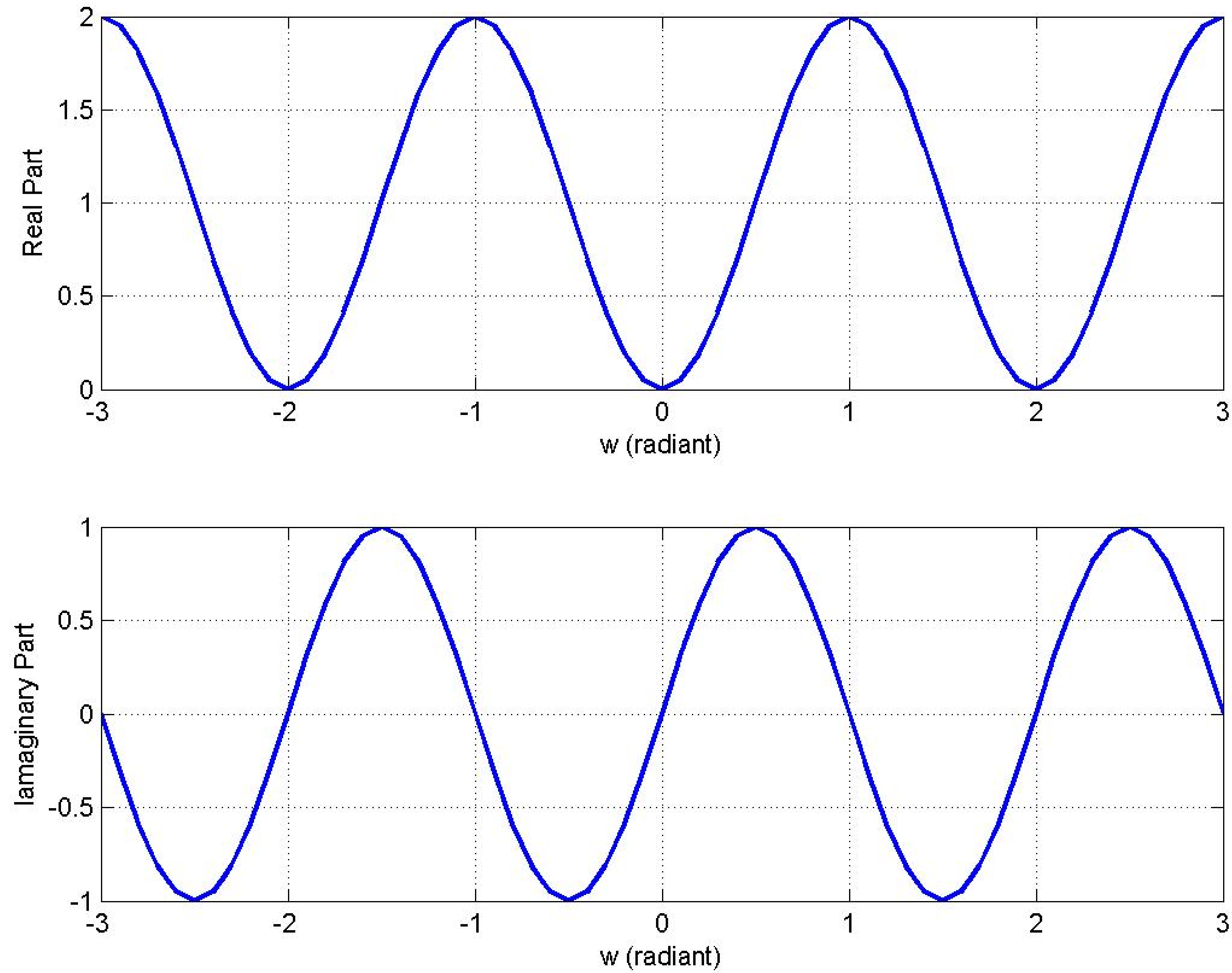
$$\left|H(\omega_s)\right| = \sqrt{(1-\cos\omega_s)^2 + (\sin\omega_s)^2}$$

$$\angle H(\omega_s) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\omega_s}{1-\cos\omega_s}\right)$$

```
clear all;
w=-3:.1:3;
y=1-exp(-j*w*pi);

subplot(2,1,1)
plot(w,real(y),'linewidth',2)
grid
xlabel('w (radiant)')
ylabel('Real Part')

subplot(2,1,2)
plot(w,imag(y),'linewidth',2)
grid
xlabel('w (radiant)')
ylabel('Iamaginary Part')
```


Real Part
w (radiant)
Iamaginary Part
w (radiant)

Contoh 3:

Suatu input diskrit diketahui sebagai berikut: x[n] = 4 + 2cos(0.3 πn – π/4)
Pada saat sistem diuji, keluar output sebagai berikut:

y[n] = x[n]-x[n-1]

Cari bentuk respon frekuensi sistem dan cari bentuk output pada saat H(0) = 0 terjadi.

Penyelesaian:

Dengan melihat kembali hasil pada kasus sistem persamaan beda orde 1:

$$H(\omega) = 2\sin\left(\omega_s / 2\right) e^{j\left(\pi/2 - \omega_2/2\right)}$$

$$\left|H(0.3\pi)\right| = \left|2\sin\left(0.3\pi/2\right) e^{j\left(\pi/2 - 0.3\pi/2\right)}\right| \approx 2$$

- **Kembali ke prinsip awal**

$x[n] = A_0 + A_1\cos(\omega_1 n + \phi_1)$

$y[n] = H(0)A0 + |H(\omega_1)|A1\cos(\omega_1 n + \phi_1 + H(\omega_1))$

Maka:

$y[n] = 4H(0) + 2|H(\omega_1)|A1\cos(0{,}3\pi n - \pi/4 + H(0{,}3\pi))$

dengan kondisi H(0)= 0, maka:

$y[n] = 2(2)\sin(0{,}3\pi/2)\cos(0{,}3\pi n - \pi/4 - 0{,}3\pi/2)$

$= 1{,}816 \cos(0{,}3\pi - 0{,}1\pi)$

Kasus pada Low Pass Filter Sederhana:

Suatu sistem memiliki frekuensi respon

$$H(\omega_s) = 1 + 2e^{-j\omega_s} + e^{-j2\omega_s}$$
$$= \left(2 + 2\cos\omega_s\right)e^{-j\omega_s}$$

Nilai $(2 + 2\cos\omega_s) \geq 0$ untuk semua ω

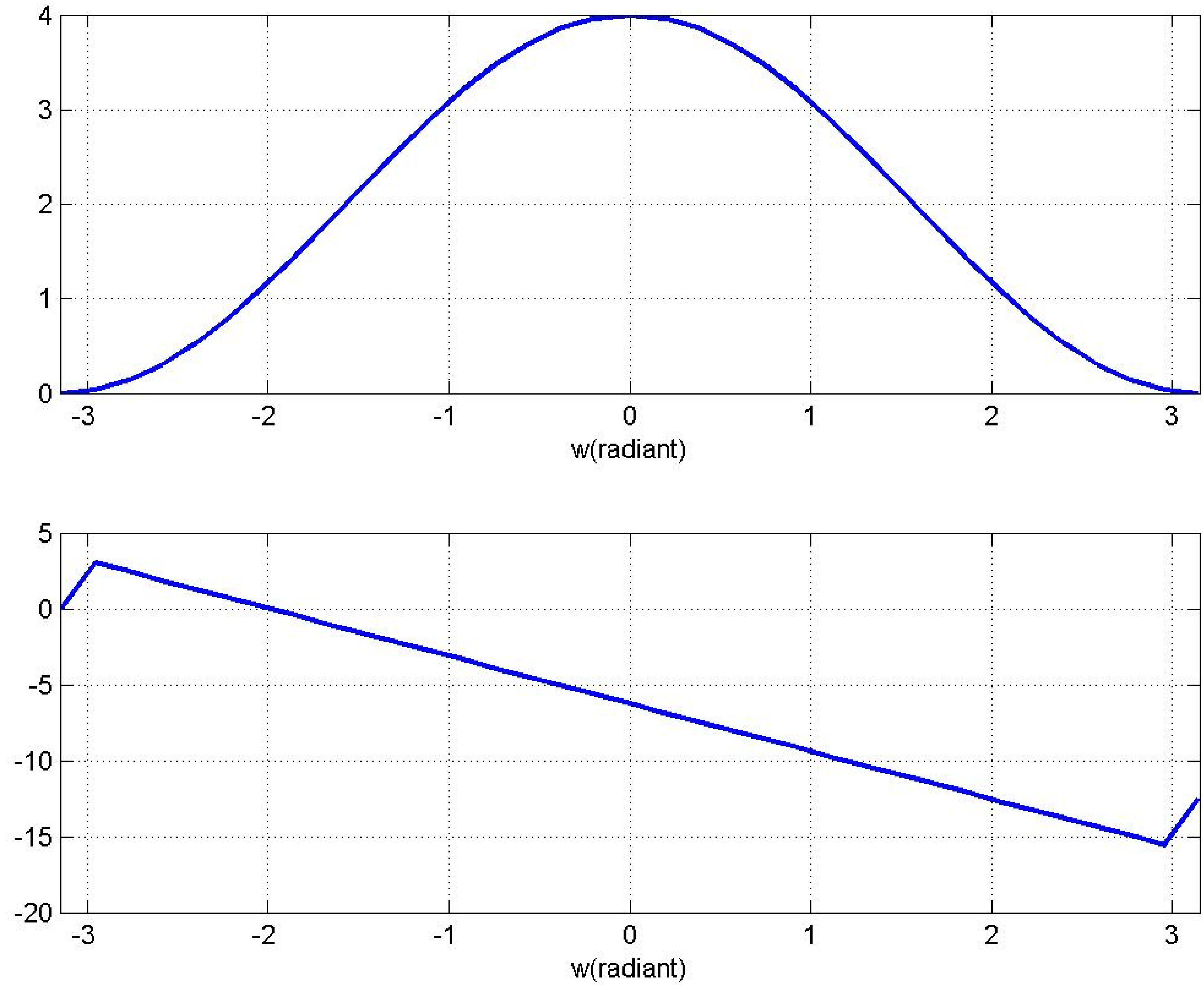
Kita juga memiliki:

$|H(\omega_s)| = (2 + 2\cos(\omega_s)$ dan $H(\omega_s) = -\omega_s$

Coba anda gambarkan nilai ini untuk $-\pi < \omega_s < \pi$

```
clear all;
ws=-pi:pi/17:pi;
H_ws=(2+2*cos(ws)).*exp(-j*ws*pi);
subplot(2,1,1)
plot(ws,abs(H_ws),'linewidth',2)
grid
xlabel('w(radiant)')

subplot(2,1,2)
plot(ws,phase(H_ws),'linewidth',2)
grid
xlabel('w(radiant)')
```


4
3
2
1
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
w(radiant)
5
0
-5
-10
-15
-20
-3
-2
-1
0
1
2
3
w(radiant)

Contoh 4:

Jika diketahui suatu input adalah $x[n] = 4 + 3\cos((\pi/3)n - \pi/2) + 3\cos((20\pi/21)n)$
Dapatkan output dari y[n] =……………

Penyelesaian:

Dengan gambar yang terbangkit, coba anda hitung
H(ws) pada ws =0, π/3, dan 20π/21 π_1

$$H(0) = (2 + 2\cos(0))\, e^{-j0}$$
$$= 4$$
$$H(\pi/3) = (2 + 2\cos(\pi/3))\, e^{-j\pi/3}$$
$$= (2 + 1)\, e^{-j\pi/3}$$
$$= 3e^{-j\pi/3}$$
$$H(20\pi/21) = 0{,}0223\, e^{-j20\pi/21}$$

Nilai-nilai ini bisa anda cocogkan dengan gambar…?

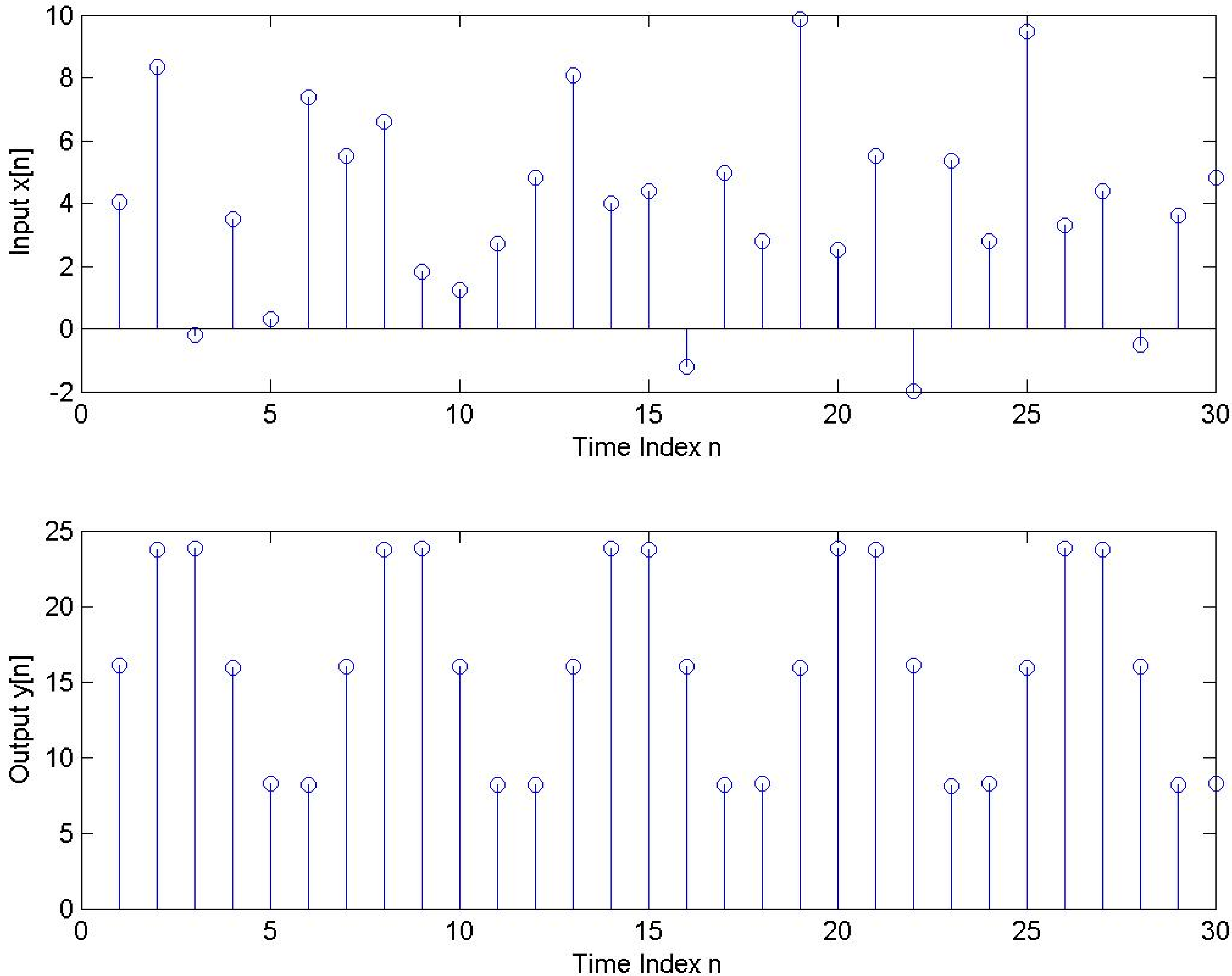
- Outputnya:

$y[n] = 4.4 + 3.3 \cos((\pi/3)n - \pi/3 - \pi/2) + (0{,}0223)\ 3\cos((20\pi/21)n - 20\pi/21)$
$\quad =16 + 9 \cos(\pi/3(n-1) - \pi/2) + 0{,}067 \cos(20\pi/21(n-1))$

Gambarkan outputnya….

```
n=1:1:30;
x_n = 4 + 3*cos(n*pi/3 - pi/3) + 3*cos(n*20*pi/21);
subplot(2,1,1)
stem(n,x_n)
ylabel('Input x[n]')
xlabel('Time Index n')

subplot(2,1,2)
y_n = 16 + 9*cos(pi/3*(n-1) - pi/2) + 0.067*cos(20*pi/21*(n-1));
stem(n,y_n)
ylabel('Output y[n]')
xlabel('Time Index n')
```


Input x[n]
Time Index n
Output y[n]
Time Index n